Bloque 4: Análisis

Asíntotas,

Puntos Críticos,

Monotonía y Curvatura 2011

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2011. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCION B. EJERCICIO 1.

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$ para $x \neq 0$.
a) [1,25 puntos] Estudia las asíntota de la gráfica de la función.
b) [1,25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Calculamos el dominio de $f(x)$:

$$dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \neq 0\}$$

$$x^3 = 0 \rightarrow \quad x = 0 \ (triple)$$

$$dom f(x) = \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

El dominio de una función racional (que tenga x en el denominador) son todos los valores menos los que anulan el denominador. Calculamos su dominio simplemente igualando su denominador a cero y resolviendo la ecuación que obtendremos, así su dominio será todos los números reales menos las soluciones que hemos obtenido.

a) Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: En funciones de cociente de polinomios sabemos que las asíntotas verticales corresponden a los valores que anulan el denominador y no anulan al numerado. En este caso ocurre para $x = 0$.

Una recta $x = k$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si:

$$\lim_{x\to k^-} f = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to k^+} f = \pm\infty$$

Siendo k las raíces reales del denominador que no lo sean del numerador.

Estudiamos los límites laterales para conocer la posición de la gráfica de f respecto a su asíntota vertical.

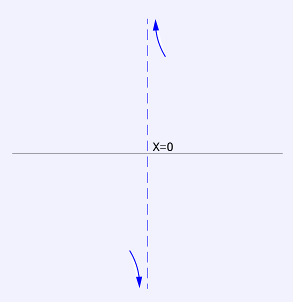
Para $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^4+1}{x^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^4+1}{x^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Tiene AV en $x = 0$

Posición de la gráfica respecto a la AV



AH:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4+1}{x^3} = \frac{+\infty}{-\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{12x^3}{3x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{12x}{3} = -\infty$$

No tiene AH por la rama izquierda.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^4+1}{x^3} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{12x^3}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{12x}{3} = +\infty$$

No tiene AH por la rama derecha.

Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

$$\lim_{x\to -\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x\to +\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.
En funciones racionales de polinomios si el grado del numerador es mayor al grado denominador no tendrá Asíntota Horizontal.

La gráfica de f no posee asíntota horizontal (resultado que sabíamos de antemano, en funciones racionales irreducibles cuando el grado del polinomio del numerador es una unidad mayor que el polinomio que compone el denominador sabemos con seguridad que tendrá asíntota oblicua).

AO: Tiene la forma $y = mx + n$

i) Calculamos m:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{3x^4+1}{x^3}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^4+1}{x\cdot x^3} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^4+1}{x^4} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{12x^3}{4x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{12}{4} = 3$$

ii) Como $m = 3$, procedemos a calcular n:

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^4+1}{x^3} - 3x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+1-3x^4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua de la gráfica de f tiene la forma $y = 3x$.

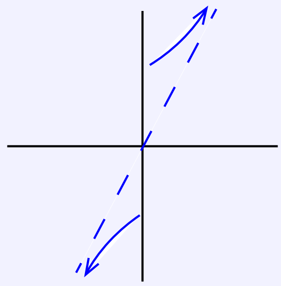
Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de una función $y = f(x)$si:

- $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, siendo $m \neq 0, \pm\infty$
- $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$, siendo $n \in \mathbb{R}$

Si una f posee una AH entonces no tiene una AO, pero si no tiene AH puede tener AO.
En funciones racionales, irracionales y en funciones a trozos debemos hacer por separado los límites para $\pm\infty$porque podemos obtener resultados distintos.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua. Para ello haremos los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ de la gráfica de f menos la $A.O.$

Posición de la gráfica respecto a la AO



$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x^4+1}{x^3}-3x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4+1-3x^4}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{-\infty}=0^-$$

Al obtener 0^- cuando x tiende a $-\infty$, sabemos que por la rama izquierda la gráfica de f se aproxima por debajo de la asíntota oblicua.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^4+1}{x^3}-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+1-3x^4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

Al obtener 0^+ cuando x tiende a $+\infty$, sabemos que por la rama derecha la gráfica de f se aproxima por encima respecto de la asíntota oblicua.

Solución:

Las rectas $x=0$ son asíntotas verticales a la gráfica de f.
La recta $y=3x$ es la asíntota oblicua a la gráfica de f.

b) Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3}$$

$$= \frac{12x^3 \cdot x^3 - \left(3x^4+1\right) \cdot 3x^2}{\left(x^3\right)^2} =$$

$$= \frac{3x^6 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x \cdot \left(x^4-1\right)}{x^6}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,\ b]$ y derivable $(a,\ b)$ podemos determinar la monotonía si estudiaremos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $(a,\ b)$.
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $(a,\ b)$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{3x \cdot \left(x^4-1\right)}{x^6} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad 3x \cdot \left(x^4-1\right) = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$3x \cdot \left(x^4-1\right) = 0$

$3x = 0 \rightarrow x = 0$ no válida al ser una AV

$x^4 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y los problemas en el dominio, $x = 0$:

Intervalos	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$(1,\ +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos antes los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = -1$ pasamos de crecer a decrecer por tanto tenemos un máximo relativo, mientras que en $x = 1$ pasamos de decrecer a crecer en consecuencia tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen en $x = \pm 1$ para obtener el valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolos en $f(x)$.

$$f(-1) = \frac{3 \cdot (-1)^4 + 1}{(-1)^3} = \frac{3+1}{-1} = -4 \rightarrow \text{Máximo relativo en el punto } A(-1,\ -4)$$

$$f(1) = \frac{3 \cdot (1)^4 + 1}{(1)^3} = \frac{3+1}{1} = 4 \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } B(1,\ 4)$$

Solución:

$f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty,\ -1)$.
$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-1,\ 1) \setminus \{0\}$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $(1,\ +\infty)$.
$f(x)$ tiene un máximo relativo en $A(-1,\ -4)$.
$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $B(1,\ 4)$.

2011. RESERVA A. OPCION B. EJERCICIO 1.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 4 - x^2$

(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

(b) [1,5 puntos] Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x + 2y - 2 = 0$.

(a) La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 2$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)} \cdot (x - 2) \tag{1}$$

Necesitamos calcular $f(2)$, $f'(x)$ y posteriormente $f'(2)$.

$f(x) = 4 - x^2$

$f'(x) = 0 - 2x = -2x$

$f(2) = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

$f'(2) = -2 \cdot 2 = -4$

Sustituimos los valores en la ecuación de la recta normal (1).

$y - 0 = -\frac{1}{-4} \cdot (x - 2) \to y - 0 = \frac{1}{4} \cdot (x - 2)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - 0 = \frac{1}{4} \cdot (x - 2) \to y = \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2}$

Solución:

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 2$ es $y = \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2}$.

(b) Si la tangente a su gráfica debe ser perpendicular a la recta $x + 2y - 2 = 0 \to y = \frac{2-x}{2} = -\frac{1}{2}x + 1$ se cumple que el producto de ambas pendientes debe dar -1, es decir $m \cdot f'(x) = -1$, por tanto $f'(x) = -\frac{1}{m}$, para $m = -\frac{1}{2}$ entonces $f'(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$, al aplicar dicha condición obtendremos los valores de la coordenada x de los puntos que la verifican, para ello necesitamos la derivada de la función ya calculada en el apartado anterior.

Si la ecuación de la recta tangente es perpendicular a la recta $y = mx + n$, sabemos que ambas pendientes deben de ser opuestas e inversas, por tanto $f'(a) = -\frac{1}{m}$, porque la derivada de f en un punto es la pendiente de la tangente a la curva.

$f(x) = 4 - x^2 \to f'(x) = -2x$

$$\left.\begin{array}{rr} f'(x) = & -2x \\ f'(x) = & 2 \end{array}\right| \to -2x = 2$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$-2x = 2 \to x = -1$

Ahora necesitamos obtener su coordenada en el eje de ordenadas (Eje OY), para ello lo sustituimos en $f(x)$.

$f(-1) = 4 - (-1)^2 = 3 \to A(-1, 3)$

Solución:

El punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x + 2y - 2 = 0$ es $A(-1, 3)$.

2011. RESERVA B. OPCION B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] En una empresa los ingresos (en euros) depende de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión,

$$\frac{400x}{x-30}$$

Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

La función $f(x)$ es una función a trozos definida por dos intervalos, siendo su expresión:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+70x & si\ \ 18\le x<50\\ \dfrac{400x}{x-30} & si\ \ x\ge 50\end{cases}$$

Antes de continuar el problema debemos de estudiar su continuidad, la gráfica de f solo presenta un único punto conflictivo en $x=50$, al tratarse de un punto donde pasamos de una función a otra. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos de la función es continua y derivable en su dominio.

Estudiamos continuidad en $x=50$:

$$f(50)=\frac{400\cdot 50}{50-30}=1000$$

$$\lim_{x\to 50^-}\left(-x^2+70x\right)=-(50)^2+70\cdot 50=1000$$

$$\lim_{x\to 50^+}\frac{400x}{x-30}=f(50)=1000$$

Como los límites laterales coinciden, $\lim_{x\to 50^-} f(x)=\lim_{x\to 50^+} f(x)$ podemos afirmar que existe $\lim_{x\to 50} f(x)=1000$ y como se cumple que la imagen es igual al valor del límite, $f(50)=\lim_{x\to 50} f(x)=1000$, nuestra función es continua en todo su dominio.

Una función f es derivable en $x=a$ si verifica:

- Es continua en $x=a$, que se verificará si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:
  - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
  - Existe $\lim_{x\to a} f(x)$, para ello los límites laterales deben de coincidir, $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=b\to\lim_{x\to a} f(x)=b$.
  - El límite sea igual al valor de la función, $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-)=f'(a^+)$.

Por tanto si una función es derivable en $x=a$ también es continua, pero si una función es continua puede que sea derivable.

Para estudiar los extremos relativos calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 70x & si \;\; 18 \leq x < 50 \\ \dfrac{400x}{x-30} & si \;\; x \geq 50 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 70 & si \;\; 18 < x < 50 \\ \dfrac{400 \cdot (x-30) - 400x \cdot (1-0)}{(x-30)^2} & si \;\; x \geq 50 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 70 & si \;\; 18 < x < 50 \\ \dfrac{-1200}{(x-30)^2} & si \;\; x \geq 50 \end{cases}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiaremos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

- Para $18 \leq x < 50$:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -2x + 70 \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; -2x + 70 = 0 \rightarrow x = 35 \;\; \text{válida}$$

  porque se encuentra dentro del intervalo.

- Para $x \geq 50$:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{-1200}{(x-30)^2} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; -1200 \neq 0$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente $x = 35$ y sus extremos serán los valores entre los que se encuentra definida, es decir entre 18 y $+\infty$, así como el punto donde pasamos de una función a otra $x = 50$.

Intervalos	$(18,\ 35)$	$(35,\ 50)$	$(50,\ +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece	$\searrow$ Decrece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = 35$ pasamos de crecer a decrecer por tanto tenemos un máximo relativo. Ahora calculamos la imagen para el valor de t para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolos en $f(x)$.

Según el teorema de Weierstrass si una función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos c y d pertenecientes a dicho intervalo donde f alcanza sus valores extremos absolutos.
Para determinar extremos absolutos o globales nos bastará con calcular las imagen de sus extremos relativos y de los extremos del intervalo, siendo su máximo y mínimo absolutos aquellas con el valor más alto y más bajo respectivamente.

$f(35) = -(35)^2 + 70 \cdot 35 = 1225 \rightarrow$ Máximo relativo en el punto $A(32,\ 1225)$

Al tratarse de una función continua en su dominio donde solamente crece hasta $x = 32$ para posteriormente no parar de decrecer, en dicho punto nos encontramos con el valor más alto posible, por lo tanto su máximo absoluto se encuentra en $A(32,\ 1225)$.

Solución:

$f(x)$ tiene un máximo absoluto en $A(32,\ 1225)$ y en consecuencia el máximo ingreso es de 1225 euros y se alcanza a los 35 años de edad .