Bloque 6: Espacio Euclideo

Simetría 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 4.

[2,5 puntos] Halla el punto simétrico de $P\,(1,1,1)$ respecto de la recta r de ecuación

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$$

Obtenemos un punto y un vector director para expresar la recta r en forma paramétrica, así nos facilitaremos los cálculos posteriores.

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$$

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-(-1)}{-1}$$

$$P_r\,(1,\ 0,\ -1)$$

$$\overrightarrow{v_r}=(2,\ 3,\ -1)$$

La recta r expresada en forma paramétrica es

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2\cdot\lambda \\ y = 0+3\cdot\lambda \\ z=-1-1\cdot\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Primero necesitamos un plano perpendicular r que pase por P, entonces el vector director de la recta coincidirá con el normal del plano.

$$r \perp \pi \rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_\pi}=(2,\ 3,\ -1)$$

La ecuación general de un plano es de la forma $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, donde las constantes A, B y C representan las componentes de su vector normal, como $\overrightarrow{n_\pi}=(2,\ 3,\ -1)$ sabemos que $A=2$, $B=3$ y $C=-1$, por lo tanto el plano pedido será de la forma:

$$\pi \equiv 2\cdot x+3\cdot y-1\cdot z+D=0$$

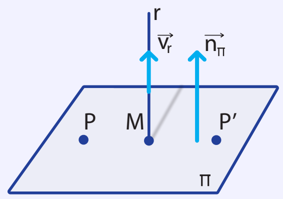
$$\pi \equiv 2x+3y-z+D=0$$

Una recta r expresada en forma continua tiene la siguiente expresión.

$$r \equiv \frac{x-a}{v_1}=\frac{y-b}{v_2}=\frac{z-c}{v_3}$$

Donde los valores a, b y c representan un punto de la recta pero con el signo opuesto, $P_r=(a,\ b,\ c)$, mientras que los valores del denominador son las coordenadas de su vector director, $v_r=(v_1,\ v_2.\ v_3)$.

Para determinar la simetría de un punto P respecto de una recta r, realizaremos los siguientes pasos:



- Creamos un plano π que sea perpendicular a r y pase por el punto P.

$$r \perp \pi \rightarrow v_r = n_\pi$$
$$P \subset \Pi \rightarrow P = P_\pi$$

- Obtenemos el punto M como la intersección entre la recta r y el plano π, para ello sencillamente igualaremos la recta al plano y resolveremos la ecuación obtenida.

- Aplicaremos la expresión del punto medio para determinar su simétrico.

$$M=\frac{P+P'}{2}\rightarrow P'=2M-P$$

Nos falta por determinar D, para ello el enunciado nos indica que mi plano debe pasar por el punto $P(1,1,1)$, por lo tanto dicho punto coincidirá con un punto de mi plano, $P \subset \pi \to P_\pi = P(1,1,1)$, como sabemos que si un punto pertenece a un plano este debe verificar su ecuación, sencillamente sustituimos las coordenadas del punto P en la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+3y-z+D=0 \\ P(1,1,1) \end{array}\right| \to \begin{array}{l} 2\cdot(1)+3\cdot(1)-1\cdot(1)+D=0 \\ D=-4 \end{array}$$

El plano π que necesitamos es $2x+3y-z-4=0$.

A continuación calculamos el punto M resolviendo el sistema formado por la recta r y el planoπ.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+3y-z-4=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases} \end{array}\right| \to \begin{array}{l} 2\cdot(1+2\lambda)+3\cdot(3\lambda)-(-1-\lambda)-4=0 \\ 2+4\lambda+9\lambda+1+\lambda-4=0 \\ \lambda=\dfrac{1}{14} \end{array}$$

Hemos obtenido el valor de $\lambda = \dfrac{1}{14}$ si lo sustituimos en la ecuación paramétrica de la recta tendremos las coordenadas del punto M.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{1}{14} \\ r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases} \end{array}\right| \to \begin{array}{l} x=1+2\cdot\dfrac{1}{14}=\dfrac{8}{7} \\ y=3\cdot\dfrac{1}{14}=\dfrac{3}{14} \\ z=-1-\dfrac{1}{14}=-\dfrac{15}{14} \\ M\left(\dfrac{8}{7},\dfrac{3}{14},-\dfrac{15}{14}\right) \end{array}$$

Aplicamos la expresión del punto medio para obtener el simétrico pedido.

$$M=\frac{P+P'}{2};\ \ 2M=P+P' \text{ por tanto } P'=2M-P$$

$$P'=2\cdot\left(\frac{8}{7},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)-(1,1,1)=\left(\frac{16}{7},\frac{3}{7},-\frac{15}{7}\right)-(1,1,1)=\left(\frac{16}{7}-1,\frac{3}{7}-1,-\frac{15}{7}-1\right)=\left(\frac{9}{7},-\frac{4}{7},-\frac{22}{7}\right.$$

Solución:

El punto simétrico de P respecto de la recta r es $P'\left(\dfrac{9}{7},-\dfrac{4}{7},-\dfrac{22}{7}\right)$.