Bloque 6: Espacio Euclideo

Posición Relativa 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA

DE

CONTENIDO

2010. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 4.

Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$x+y=1, \quad ay+z=0 \quad y \quad x+(1+a)\,y+az=a+1$$

a) [1,5 puntos] ¿Cuánto ha de valer a para que no tenga ningún punto en común?
b) [1 punto] Para $a=0$, determina la posición relativa de los planos.

---

a) Consideramos los planos como un sistema de ecuaciones lineales, para que no tenga ningún punto en común debemos de tener un Sistema Incompatible, para ello transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ ay+z & = & 0 \\ x+(1+a)\,y+az & = & a+1 \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro a en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de a que deberemos estudiar, esto debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2=C_2-C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & a & 1 \\ \cancel{1} & a & a \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 1\cdot[a\cdot a-a\cdot 1]=a^2-a=a\cdot(a-1)$$

$$\left.\begin{array}{rl} |A|= & a\cdot(a-1) \\ |A'|= & 0 \end{array}\right| \quad a\cdot(a-1)=0 \left\{\begin{array}{l} a_1=0 \\ a-1=0; \quad a_2=1 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $a_1=0$, $a_2=1$ y $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1\leq r\,(M)\leq min\,\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - a \cdot 0 = 1 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2;\ \forall a \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para los casos en los que $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para los casos $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro a toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de a aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $a = 0$.
Sustituimos el valor $a = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales para obtener las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.

- Rango de A': $r(A') = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

  Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

ii) Para $a = 1$.

Sustituimos el valor $a = 1$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A': $r(A') = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & 1 & -1 \\ \cancel{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)] = 1 \to r(A') = 3$$

iii) Para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Si nuestro sistema toma valores distintos de $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Mediante el teorema de Rouché-Frobenius podemos clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $a = 0 \to r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad, los planos se cortan en una recta en común.
- Para $a = 1 \to r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución, los planos no poseen ningún punto en común.
- Para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas, los planos se cortan entre sí en un mismo punto.

Solución:

Para que los tres planos no tengan ningún punto en común el valor del parámetro debe ser $a = 1$.

b) Para $a = 0$ nuestros planos son:

$\pi_1 \equiv x + y = 1$
$\pi_2 \equiv z = 0$
$\pi_3 \equiv x + y = 1$

Por el apartado anterior sabemos que para $a = 0$ tenemos un Sistema Compatible Determinado, es decir, los tres planos se cortan en una misma recta, para determinar como se cortan entre ellos estudiaremos su posición dos a dos.

- Posición entre π_1 y π_2:

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv x + y = 1 \\ \pi_2 \equiv z = 0 \end{array}\right| \frac{1}{0} = \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{0} \text{ son secantes.}$$

- Posición entre π_1 y π_3:

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv x + y = 1 \\ \pi_3 \equiv x + y = 1 \end{array}\right| \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{1} \text{ son coincidentes.}$$

- Posición entre π_2 y π_3:

$$\left.\begin{array}{r} \pi_2 \equiv z = 0 \\ \pi_3 \equiv x + y = 1 \end{array}\right| \frac{0}{1} = \frac{0}{1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1} \text{ son secantes.}$$

Por lo tanto los planos π_1y π_3 son coincidentes y π_2 es secante a ellos dos.

Sean dos planos $\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ sabemos que

i) Si son coincidentes se verifica

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

ii) Si son paralelos se verifica

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

iii) Serán secantes si no se verifican ninguna de las condiciones anteriores.

Solución:

El plano π_2 corta a los planos π_1 y π_3 que son coincidentes entre ellos