Bloque 6: Espacio Euclideo

Pertenencias, Paralelismo y Perpendicularidad 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 4.

Considera las rectas r y s de ecuaciones

$$x-1=y=1-z \quad y \quad \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

a) [0,75 puntos] Determina su punto de corte.
b) [1 punto] Halla el ángulo que forman r y s.
c) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

Antes de resolver ninguno de los apartados expresaremos la recta r y s en forma paramétrica para facilitarnos los cálculos y extraer de ella toda la información que podamos.

En el caso de la recta r, obtenemos un punto y un vector director.

$$r \equiv x-1=y=1-z$$

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-(0)}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

$$P_r\,(1,\ 0,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ -1)$$

La recta r expresada en forma paramétrica es

$$r \equiv \begin{cases} x=1+1\cdot\theta \\ y=0+1\cdot\theta \quad \text{con } \theta\in\mathbb{R} \\ z=1-1\cdot\theta \end{cases}$$

Una recta r expresada en forma implícita (dos panos que se cortan) tiene la siguiente expresión.

$$r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

La convertimos a forma paramétrica resolviendo el sistema formado por ambos planos, simplemente sustituyendo a una de las incógnitas por un parámetro.

Si alguna de las incógnitas falta será a ella a la que le impongamos el parámetro.

Una recta r expresada en forma continua tiene la siguiente expresión.

$$r \equiv \frac{x-a}{v_1}=\frac{y-b}{v_2}=\frac{z-c}{v_3}$$

Donde los valores a, b y c representan un punto de la recta pero con el signo opuesto, $P_r=(a,\ b,\ c)$, mientras que los valores del denominador son las coordenadas de su vector director, $v_r=(v_1,\ v_2.\ v_3)$.

En el caso de la recta s, resolveremos el sistema dándole a y el valor de λ.

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{array} \right. \quad y = \lambda \quad \left| \rightarrow \begin{array}{l} x - 2y = -1 \\ y = \lambda \\ y + z = 1 \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} x - 2\lambda = -1 \\ y = \lambda \\ \lambda + z = 1 \end{array} \left| \rightarrow \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right|$$

La recta s expresada en forma paramétrica es

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = -1 + 2 \cdot \lambda \\ y = 0 + 1 \cdot \lambda \\ z = 1 - 1 \cdot \lambda \end{array} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_s\,(-1,\ 0,\ 1) \\ \\ \overrightarrow{v_s} = (2,\ 1,\ -1) \end{array} \right.$$

a) Para determinar el punto de corte entre dos rectas, solo debemos resolver el sistema formado por ellas, igualando sus coordenadas dos a dos.

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \theta \\ y = \theta \\ z = 1 - \theta \end{array} \right. \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \theta = -1 + 2\lambda ; \theta - 2\lambda = -2 \\ \theta = \lambda \\ 1 - \theta = 1 - \lambda ; \theta = \lambda \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema obtenido, dando nos cuenta que las dos ultimas ecuaciones son iguales.

$$\begin{array}{l} \theta - 2\lambda = -2 \\ \theta = \lambda \end{array} \left| \rightarrow \begin{array}{l} \theta - 2\theta = -2 \\ \theta = \lambda \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} \theta = 2 \\ \theta = \lambda \end{array} \left| \rightarrow \right.$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} \theta = 2 \\ \lambda = 2 \end{array} \Bigg|$$

Sea una recta r en forma paramétrica

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = a + v_1\lambda \\ y = b + v_2\lambda \\ z = c + v_3\lambda \end{array} \right.$$

Su punto genérico G_r es el formado por propias ecuaciones de la recta.

$$G_r\,(a + v_1\lambda,\ b + v_2\lambda,\ c + v_3\lambda)$$

Dos vectores son $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son perpendiculares si su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \text{ si } \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$$

Se trata de un Sistema Compatible Determinado, al obtener una única solución para cada una de las incógnitas, por lo tanto ambas rectas se cortan en un único punto, para determinarlo sustituimos $\theta = 2$ en la recta r o $\lambda = 2$ en la recta s (en ambos casos debe darnos el mismo punto).

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \theta \\ y = \theta \\ z = 1 - \theta \end{array} \right. \quad \theta = 2 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 - 2 = -1 \end{array} \longrightarrow I\,(3,\ 2,\ -1)$$

Solución:

El punto de intersección entre las rectas r y s es $I\,(3,\ 2,\ -1)$.

b) Determinamos el ángulo formado por dos rectas secantes (gracias al apartado anterior sabemos que las dos rectas son secantes puesto que solo tienen un único punto en común) mediante la definición geométrica del producto escalar usando sus vectores directores, calculados al inicio del ejercicio.

$$\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right| = \left\|\overrightarrow{v_r}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_s}\right\| \cdot cos\,(\widehat{v_r v_s})$$

$$cos\,(\widehat{v_r v_s}) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right|}{\left\|\overrightarrow{v_r}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_s}\right\|}$$

$$\widehat{v_r v_s} = arcos\left(\frac{\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right|}{\left\|\overrightarrow{v_r}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_s}\right\|}\right) \qquad (1)$$

La definición geométrica del producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ es

$$\left|\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}\right| = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cdot cos\,(\widehat{uv})$$

donde

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$
$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Calculamos $\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right|$, $\left\|\overrightarrow{v_r}\right\|$ y $\left\|\overrightarrow{v_s}\right\|$.

$$\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s} = (1,\ 1,\ -1) \bullet (2,\ 1,\ -1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 4$$

$$\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right| = |4| = 4$$

$$\left\|\overrightarrow{v_r}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\left\|\overrightarrow{v_s}\right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Sustituimos los datos en (1) para obtener el ángulo pedido.

$$\widehat{\vec{v_r}\vec{v_s}} = arcos\left(\frac{4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}\right) = arcos\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right) \approx 19,4712^{o}$$

Solución:

El ángulo que forman las rectas r y s es $19,4712^{o}$.

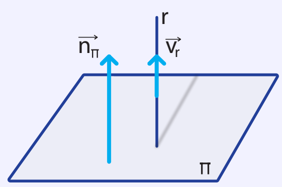
c) Para determinar un plano necesitamos un puntos y sus dos vectores directores, en este caso el plano contiene a las rectas r y s por tanto los vectores directores de la recta coincidirán con los vectores directores del plano y cualquier punto de las rectas será un punto de mi plano, por lo tanto

$$\pi \begin{cases} r\subset\pi \to \begin{cases} P_\pi = P_r\,(1,\ 0,\ 1) \\ \vec{v_\pi} = \vec{v_r} = (1,\ 1,\ -1) \end{cases} \\ s\subset\pi \to \begin{cases} P_\pi = P_s\,(-1,\ 0,\ 1) \\ \vec{v_\pi} = \vec{v_s} = (2,\ 1,\ -1) \end{cases} \end{cases}$$

Definimos el plano pedido en forma vectorial usando los vectores directores de las rectas y por ejemplo el punto de la recta r, aunque daría igual a ver usado el de la recta r o el punto de intersección entre las rectas calculado en el apartado a)

$\pi \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 1) + \alpha\,(1,\ 1,\ -1) + \beta\,(2,\ 1,\ -1)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Para definir un plano formado por dos rectas que se cortan sabemos



i) El vector directo de la recta r siempre coincidirá con un vector director del plano que lo contiene.
ii) El vector director de la recta s siempre coincidirá con un vector director del plano que lo contiene.
iii) Un punto de cualquiera de las rectas coincidirá con un punto del plano que las contiene.

Solución:

El plano que contiene a las rectas r y s es $\pi \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 1) + \alpha\,(1,\ 1,\ -1) + \beta\,(2,\ 1,\ -1)\,, con \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 4.

Los puntos $P\,(2,\ 0,\ 0)$ y $Q\,(-1,\ 12,\ 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación

$$\begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.
b) [1 punto] Comprueba si el triángulo es rectángulo.

Antes de resolver ninguno de los apartados expresaremos la recta r en forma paramétrica para facilitarnos los cálculos y extraer de ella toda la información que podamos, para ello resolveremos el sistema dándole a x el valor de λ.

$$r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \\ 4x+3z=33 \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \rightarrow$$
$$x=\lambda$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \\ 4\cdot\lambda+3z=33 \end{array} \left| \rightarrow \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \\ 3z=33-4\lambda \end{array} \right|$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\dfrac{33-4\lambda}{3}=11-\dfrac{4}{3}\lambda \end{array}$$

La recta r expresada en forma paramétrica es

$$r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \rightarrow \\ z=11-\dfrac{4}{3}\lambda \end{cases} \begin{array}{l} x=0+1\cdot\lambda \\ y=0+0\cdot\lambda \\ z=11-\dfrac{4}{3}\cdot\lambda \end{array} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} P_r\,(0,\ 0,\ 11) \\ \vec{v_r}=\left(1,\ 0,\ -\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

Una recta r expresada en forma implícita (dos planos que se cortan) tiene la siguiente expresión.

$$r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

La convertimos a forma paramétrica resolviendo el sistema formado por ambos planos, simplemente sustituyendo a una de las incógnitas por un parámetro.

Si alguna de las incógnitas falta será a ella a la que le impongamos el parámetro.

Una recta r en forma paramétrica tiene la siguiente expresión:

$$r \equiv \begin{cases} x=a+v_1\lambda \\ y=b+v_2\lambda \\ z=c+v_3\lambda \end{cases}$$

Donde los valores a, b y c representan un punto de la recta.
Mientras que los coeficientes que acompañan al parámetro λ son el vector director de la recta.

a) Como la recta r debe ser perpendicular a la recta que pasa por P y S, que la denotaremos como la recta s, enotnces sabemos que el producto escalar entre sus vectores debe ser cero.

$$\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s} = 0 \qquad (1)$$

El vector director de la recta r lo calculamos al inicio del ejercicio, $\overrightarrow{v_r} = \left(1,\ 0,\ -\frac{4}{3}\right)$, mientras que el vector director dela recta s es el formado por los puntos S y P, para poder determinarlo necesitamos crear el punto S, para ello como dicho punto debe pertenecer a la recta r eso queire decir que puede ser cualquier punto de la recta, por lo tanto definimos S como los infinitos puntos que conforman a r, es decir S será el punto genérico de r.

Sea una recta r en forma paramétrica

$$r \equiv \begin{cases} x = a + v_1\lambda \\ y = b + v_2\lambda \\ z = c + v_3\lambda \end{cases}$$

Su punto genérico G_r es el formado por propias ecuaciones de la recta.

$$G_r\ (a + v_1\lambda,\ b + v_2\lambda,\ c + v_3\lambda)$$

Dos vectores son $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son perpendiculares si su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \text{ si } \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$$

$$S = G_r = \left(\lambda,\ 0,\ 11 - \frac{4}{3}\lambda\right)$$

Ahora que tenemos S podemos determinar junto con P el vector director de la recta s.

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{PS} = S - P = \left(\lambda,\ 0,\ 11 - \frac{4}{3}\lambda\right) - (2,\ 0,\ 0) = \left(\lambda - 2,\ 0 - 0,\ 11 - \frac{4}{3}\lambda - 0\right) = \left(\lambda - 2,\ 0,\ 11 - \frac{4}{3}\lambda\right)$$

Aplicamos la condición (1) que nos permitirá determinar el valor del parámetro λ y llegar hasta la solución pedida.

$$\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s} = \left(1,\ 0,\ -\frac{4}{3}\right) \bullet \left(\lambda - 2,\ 0,\ 11 - \frac{4}{3}\lambda\right) = 1 \cdot (\lambda - 2) + 0 \cdot 0 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(11 - \frac{4}{3}\lambda\right) =$$

$$= \lambda - 2 - \frac{44}{3} + \frac{16}{9}\lambda = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\lambda - 2 - \frac{44}{3} + \frac{16}{9}\lambda = 0;\ \ \frac{9\lambda}{9} - \frac{18}{9} - \frac{132}{9} + \frac{16}{9}\lambda = 0;\ \ 9\lambda - 18 - 132 + 16\lambda = 0$$

$$9\lambda - 18 - 132 + 16\lambda = 0;\ \ 25\lambda - 150 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{150}{25} = 6$$

Solo debemos sustituir el valor de $\lambda = 6$ en nuestro punto genérico para determinar S.

$$\left.\begin{array}{l} S = \left(\lambda,\ 0,\ 11 - \dfrac{4}{3}\lambda\right) \\ \lambda = 6 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} S\left(6,\ 0,\ 11 - \dfrac{4}{3}\cdot 6\right) \\ S\,(6,\ 0,\ 3) \end{array}$$

Solución:

El punto pedido que cumple con las condiciones indicadas por el enunciado es $S\,(6,\ 0,\ 3)$.

b) Para ver si el triangulo formado por los puntos $P\,(2,\ 0,\ 0)$, $Q\,(-1,\ 12,\ 4)$ y $S\,(6,\ 0,\ 3)$ es un triángulo rectángulo necesitamos calcular previamente los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{QS}$.

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1,\ 12,\ 4) - (2,\ 0,\ 0) = (-3,\ 12,\ 4)$

$\overrightarrow{PS} = S - P = (6,\ 0,\ 3) - (2,\ 0,\ 0) = (4,\ 0,\ 3)$

$\overrightarrow{QS} = S - Q = (6,\ 0,\ 3) - (-1,\ 12,\ 4) = (7,\ -12,\ -1)$

Para su demostración podemos tomar dos caminos:

i) Qué forma un ángulo recto alguno de sus ángulos, por lo tanto el producto escalar de $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PS} = 0$ o $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{QS} = 0$ o $\overrightarrow{PS} \bullet \overrightarrow{QS} = 0$.

$\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PS} = (-3,\ 12,\ 4) \bullet (4,\ 0,\ 3) = -3 \cdot 4 + 12 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 0$ se verifica la condición, por lo tanto forman un triangulo rectángulo.

Aunque no es necesario calcular el recto de productos escalares los hemos hecho por si algún alumno no ha tenido la suerte de que el primer producto escalar ha sido cero.

$\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{QS} = (-3,\ 12,\ 4) \bullet (7,\ -12,\ -1) = -3 \cdot 7 + 12 \cdot (-12) + 4 \cdot (-1) = -169$

$\overrightarrow{PS} \bullet \overrightarrow{QS} = (4,\ 0,\ 3) \bullet (7,\ -12,\ -1) = 4 \cdot 7 + 0 \cdot (-12) + 3 \cdot (-1) = 25$

ii) Si cumple el Teorema de Pitágoras, el cuál nos dice que el lado mayor al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, para ello necesitamos el módulo de los vectores calculados anteriormente, eligiendo la hipotenusa como el lado más grande.

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (12)^2 + (4)^2} = \sqrt{169} = 13\ u$$

$$\left\|\overrightarrow{PS}\right\| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5\ u$$

$$\left\|\overrightarrow{QS}\right\| = \sqrt{(7)^2 + (-12)^2 + (-1)^2} = \sqrt{194}\ u$$

$$\left(\sqrt{194}\right)^2 = 13^2 + 5^2$$

$$194 = 169 + 25$$

$194 = 194$, se verifica la igualdad por lo tanto forman un triángulo rectángulo.

Solución:

El triángulo formado por los puntos P, Q y S es rectángulo puesto que uno de sus ángulo es rectángulo o porque verifica el Teorema de Pitágoras.

2010. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 4.

[2,5 puntos] Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta r de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{array}\right.$ y contiene a la recta s definida por $\left\{\begin{array}{l} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{array}\right.$.

Antes expresaremos la recta r en forma paramétrica para extraer de ella toda la información que podamos, para ello resolveremos el sistema dándole a y el valor de θ.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{array}\right. \quad y=\theta \quad \rightarrow \left|\begin{array}{l} x-2y+11=0 \\ y=\theta \\ 2y+z-19=0 \end{array}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{l} x-2\cdot(\theta)+11=0 \\ y=\theta \\ 2\cdot(\theta)+z-19=0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{l} x=-11+2\theta \\ y=\theta \\ z=19-2\theta \end{array}\right|$$

La recta r expresada en forma paramétrica es

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=-11+2\theta \\ y=\theta \\ z=19-2\theta \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} x=-11+2\cdot\theta \\ y=0+1\cdot\theta \\ z=19-2\cdot\theta \end{array} \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

$P_r\,(-11,\ 0,\ 19)$

$\vec{V_r} = (2,\ 1,\ -2)$

Obtenemos un punto y un vector director de la recta s.

$$s \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{array}\right. \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P_s\,(1,\ -2,\ 2) \\ \\ \vec{V_s}=(-5,\ 3,\ 2) \end{array}\right.$$

Una recta r expresada en forma implícita (dos planos que se cortan) tiene la siguiente expresión.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right.$$

La convertimos a forma paramétrica resolviendo el sistema formado por ambos planos, simplemente sustituyendo a una de las incógnitas por un parámetro.

Si alguna de las incógnitas falta será a ella a la que le impongamos el parámetro.

Si una recta s está contenía en un plano π, $s \subset \pi$, entonces sabemos que

- El vector director de la recta también es un vector directos del plano

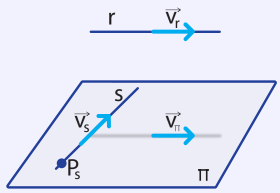
$$v_r = v_\pi$$

- El punto de la recta también es un punto del plano

$$P_s = P_\pi$$

Si una recta r es paralela a un plano π, $r \parallel \pi$, entonces el vector director de la recta coincidirá con un vector director del plano

$$v_r = v_\pi$$



Definimos el plano π usando los vectores directores de ambas rectas y un punto de la recta s como un punto del plano, por tanto el plano pedido en forma vectorial es

$$\pi \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ -2,\ 2) + \alpha\,(2,\ 1,\ -2) + \mu\,(-5,\ 3,\ 2)\ \text{ con } \alpha, \mu \in \mathbb{R}$$

Solución:

El plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r expresado en forma vectorial es

$$\pi \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ -2,\ 2) + \alpha\,(2,\ 1,\ -2) + \mu\,(-5,\ 3,\ 2)\ \text{ con } \alpha, \mu \in \mathbb{R}$$

2010. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 4.

Sean los puntos $A\,(1,\ 1,\ 1)$, $B\,(-1,\ 2,\ 0)$, $C\,(2,\ 1,\ 2)$ y $D\,(t,\ -2,\ 2)$.

a) [1,25 puntos] Determina el valor de t para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

b) [1,25 puntos] Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B, que contenga al punto C.

---

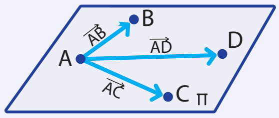
a) Creamos tres vectores partiendo desde un mismo punto que serán en nuestro caso $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 0) - (1,\ 1,\ 1) = (-2,\ 1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 1,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ 0,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (t,\ -2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (t-1,\ -3,\ 1)$$

Si cuatro puntos se encuentran en el mismo plano quiere decir que existe combinación lineal entre los vectores formados por ellos, puesto que para definir un plano solo es necesario dos vectores independientes.



Al existir combinación lineal entre ellos gracias a las propiedades de los determinantes sabemos que el determinante formado por los tres vectores debe ser nulo.

Observando los resultados obtenidos nos damos cuenta que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son independientes, sus coordenadas no son proporcionales, como para definir un plano solo es necesario dos vectores independientes si los usáramos crearíamos un plano que contendría a los puntos A, B y C pero el enunciado nos indica que debe incluir también al punto D, por lo tanto para que incluya a dicho punto el vector AD debería poder expresarse como combinación lineal de los anteriores vectores y gracias a las propiedades de los determinantes sabemos que si existe combinación lineal el determinante vale cero, es decir para que D pertenezca al plano obligaremos a que el determinante formado por los tres vectores sea nulo.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ t-1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+3F_1} = \begin{vmatrix} \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 1 & \cancel{0} & 1 \\ t-7 & \cancel{0} & -2 \end{vmatrix} = -(1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t-7 & -2 \end{vmatrix} = -1\cdot[1\cdot(-2) - 1\cdot(t-7)] = 2 + t - 7 = t - 5$$

Como debe ser nulo $t-5=0 \rightarrow t=5$

Solución:

Los cuatro puntos estarán contenidos en el mismo plano para $t=5$.

b) Para determinar un plano en forma general necesitamos su vector normal y un punto por el que pase dicho plano, como el enunciado nos indica que es perpendicular al segmento AB entonces sabemos que el vector normal del plano coincidirá con el vector formado por los puntos A y B y como debe pasar por el punto A entonces dicho punto será un punto de mi plano.

$$\pi \equiv \begin{cases} AB \perp \pi : & \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} \\ C \in \pi : & P_\pi = C\,(2,\ 1,\ 2) \end{cases}$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ lo tenemos calculado en el apartado anterior.

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2,\ 1,\ -1)$$

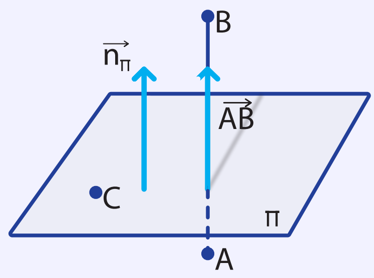
La ecuación general de un plano es de la forma $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, donde las constantes A, B y C representan las componentes de su vector normal, como $\overrightarrow{n_\pi} = (-2,\ 1,\ -1)$ sabemos que $A = -2$, $B = 1$ y $C = -1$, por lo tanto el plano pedido será de la forma:

Si un plano es perpendicular a un segmento entonces sabemos que el vector formado por cualquiera de los puntos de dicho segmento coincidirá con el vector normal de mi plano.

$$\pi \perp \overline{AB} \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB}.$$

Ademas como el plano debe pasar por el punto A entonces dicho punto coincidirá con un punto de mi plano.

$$C \subset \pi \rightarrow P_\pi = C$$



$$\pi \equiv -2 \cdot x + (1) \cdot y + (-1) \cdot z + D = 0$$

$$\pi \equiv -2x + y - z + D = 0$$

Nos falta por determinar D, para ello el enunciado nos indica que mi plano debe pasar por el punto $C\,(2,\ 1,\ 2)$, por lo tanto dicho punto coincidirá con un punto de mi plano, $C \subset \pi \rightarrow P_\pi = C\,(2,\ 1,\ 2)$, como sabemos que si un punto pertenece a un plano este debe verificar su ecuación, sencillamente sustituimos las coordenadas del punto P en la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -2x + y - z + D = 0 \\ C\,(2,\ 1,\ 2) \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} -2 \cdot (2) + (1) - 1 \cdot (2) + D = 0 \\ D = 5 \end{array}$$

El plano pedido en forma general es $\pi \equiv -2x + y - z + 5 = 0$.

Solución:

La ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por C en forma general o implícita es $\pi \equiv -2x + y - z + 5 = 0$.

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 4.

Considera los puntos $A\,(1,\ 2,\ 1)$ y $B\,(-1,\ 0,\ 3)$.
a) [1,25 puntos] Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.
b) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A.

---

a) Debemos de dividir el segmento en tres partes iguales, para ello necesitamos obtener los puntos que denominaremos C y D. El punto C lo obtendremos mediante la relación de proporcionalidad entre los vectores AB y AC.

$$\overrightarrow{AB} = 3\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$B - A = 3\cdot(C - A)$$

$$B - A = 3C - 3A$$

$$B - A + 3A = 3C$$

$$C = \frac{1}{3}\cdot(B + 2A) \qquad (1)$$

Sustituimos los datos en la expresión obtenida (1) para determinar el punto C.

$$C = \frac{1}{3}\cdot[(-1,\ 0,\ 3) + 2\cdot(1,\ 2,\ 1)] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot[(-1,\ 0,\ 3) + (2,\ 4,\ 2)] =$$

$$\frac{1}{3}\cdot(-1+2,\ 0+4,\ 3+2) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(1,\ 4,\ 5) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

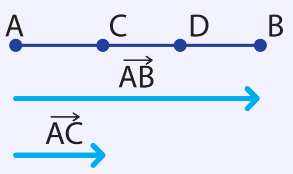
Dividir un segmento en partes iguales no es más que una relación de proporcionalidad entre los vectores que podemos formar con ellos, en el caso concreto de dividir un segmento en tres partes iguales podemos darnos cuenta que se cumplen las siguientes condiciones:

- El vector AB es tres veces el vector AC.

$$AB = 3\cdot AC$$
$$C = \frac{1}{3}\cdot(B + 2A)$$

- El punto D es el punto medio de los puntos C y B, para calcularlo podemos aplicar la expresión del punto medio.

$$D = \frac{C + B}{2}$$



El punto D es el punto medio de C y B, por lo tanto solo debemos aplicar la expresión del punto medio para obtenerlo.

$$D = \frac{C+B}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) + (-1,\ 0,\ 3)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+(-1),\ \frac{4}{3}+0,\ \frac{5}{3}+3\right) =$$

$$D = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Solución:

Las coordenadas de los puntos que dividen el segmento en partes iguales son $C\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ y $D\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

b) Para determinar un plano en forma general necesitamos su vector normal y un punto por el que pase dicho plano, como el enunciado nos indica que es perpendicular al segmento AB entonces sabemos que el vector normal del plano coincidirá con el vector formado por los puntos A y B y como debe pasar por el punto A entonces dicho punto será un punto de mi plano.

$$\pi \equiv \begin{cases} AB \perp \pi : & \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} \\ A \in \pi : & P_\pi = A\,(1,\ 2,\ 1) \end{cases}$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 0,\ 3) - (1,\ 2,\ 1) =$$

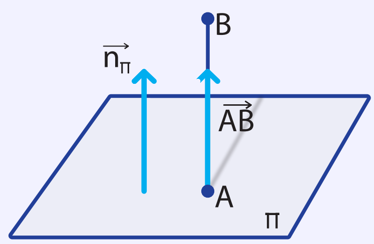
$$= (-1-1,\ 0-2,\ 3-1) = (-2,\ -2,\ 2)$$

Si un plano es perpendicular a un segmento entonces sabemos que el vector formado por cualquiera de los puntos de dicho segmento coincidirá con el vector normal de mi plano.

$$\pi \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB}.$$

Ademas como el plano debe pasar por el punto A entonces dicho punto coincidirá con un punto de mi plano.

$$A \subset \pi \rightarrow P_\pi = A$$



La ecuación general de un plano es de la forma $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, donde las constantes A, B y C representan las componentes de su vector normal, como $\overrightarrow{n_\pi} = (-2,\ -2,\ 2)$ sabemos que $A = -2$, $B = -2$ y $C = 2$, por lo tanto el plano pedido será de la forma:

$$\pi \equiv -2 \cdot x + (-2) \cdot y + 2 \cdot z + D = 0$$

$$\pi \equiv -2x - 2y + 2z + D = 0$$

Nos falta por determinar D, para ello el enunciado nos indica que mi plano debe pasar por el punto $P\,(2,\ 3,\ -1)$, por lo tanto dicho punto coincidirá con un punto de mi plano, $A \subset \pi \rightarrow P_\pi = A\,(1,\ 2,\ 1)$, como sabemos que si un punto pertenece a un plano este debe verificar su ecuación, sencillamente sustituimos las coordenadas del punto P en la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -2x - 2y + 2z + D = 0 \\ A\,(1,\ 2,\ 1) \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} -2 \cdot (1) - 2 \cdot (2) + 2 \cdot (1) + D = 0 \\ D = 4 \end{array}$$

El plano pedido en forma general es $\pi \equiv -2x - 2y + 2z + 4 = 0$ que podemos simplificarlo dividiéndolo entre -2 para obtener $\pi \equiv x + y - z - 2 = 0$.

Solución:

La ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por A en forma general o implícita es $\pi \equiv x + y - z - 2 = 0$.

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 4.

Considera el plano π definido por $2x - y + nz = 0$ y la recta r dada por

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

a) [1,25 puntos] Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.
b) [1,25 puntos] Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π.

Antes de resolver ninguno de los apartados extraemos la información del plano π y la recta r facilitada por el enunciado.

El plano π se encuentra dado en forma general, podemos obtener su vector normal.

$$\pi \equiv 2x - y + nz = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} = (2,\ -1,\ n)$$

Mientras que la recta r nos la facilitan en forma paramétrica, pudiendo obtener un punto de la recta y su vector director.

$$r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

$$r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-0}{4} = \frac{z-1}{2}$$

$$\overrightarrow{v_r} = (m,\ 4,\ 2)$$

$$P_r\,(1,\ 0,\ 1)$$

a) Nosotros sabemos que una recta r es perpendicular a un plano π siempre que el vector director de la recta sea paralelo al vector normal de un plano, es decir que sean proporcionales, imponiendoles dicha condición obtendremos una ecuación que nos permitirá obtener las constantes m y n.

$$r \parallel \pi \rightarrow \frac{m}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{n}$$

Una recta r expresada en forma continua tiene la expresión:

$$r \equiv \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$$

Donde los valores a, b y c representan un punto de la recta pero con el signo cambiado, $P_r = (a, b, c)$. Mientras que los valores que nos encontramos en el denominador son su vector director. $\overrightarrow{v_r} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$.

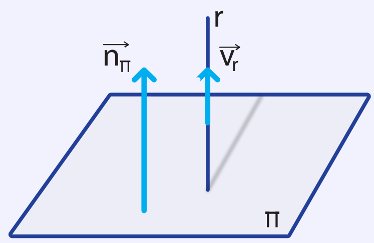
Un plano π expresado en forma general tiene la siguiente expresión

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Donde las constantes A, B y C representan el vector normal del plano, $n_\pi = (A,\ B,\ C)$.

Dos vectores $\overrightarrow{u}\,(u_1,\ u_2,\ u_3)$ y $\overrightarrow{v}\,(v_1,\ v_2,\ v_3)$ son paralelos si son proporcionales, es decir

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$



Hemos obtenido una triple igualdad, para resolverla igualamos dos a dos.

$$\frac{m}{2}=\frac{4}{-1};\quad -1\cdot m=2\cdot 4\rightarrow m=-8$$

$$\frac{4}{-1}=\frac{2}{n};\quad 4\cdot n=-1\cdot 2\rightarrow n=-\frac{1}{2}$$

Solución:

Los valores de m y n que hacen que la recta r sea perpendicular al plano π son -8 y $-\frac{1}{2}$ respectivamente.

b) Si la recta r se encuentra contenida en el plano π sabemos que el vector director de la recta r debe ser perpendicular al vector normal de mi plano.

$$\overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{n_\pi}\rightarrow\overrightarrow{v_r}\bullet\overrightarrow{n_\pi}=0$$

$\overrightarrow{v_r}\bullet\overrightarrow{n_\pi}=(m,\ 4,\ 2)\bullet(2,\ -1,\ n)=m\cdot 2+4\cdot(-1)+2\cdot n=2m-4+2n$

Como dicho producto debe valer cero acabamos de obtener la siguiente ecuación

$$2m+2n-4=0$$

La condición anterior no es suficiente para que la recta se encuentre contenida en el plano, puesto que cualquier recta paralela a ella también la verifica, es necesario imponerle una segunda condición, al estar contenida en el plano cualquier punto de la recta también debe pertenecer al plano, sencillamente sustituimos las coordenadas del punto P_r en la ecuación del plano.

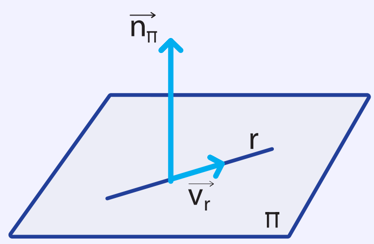
$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv 2x-y+nz=0\\ P_r\,(1,\ 0,\ 1)\end{array}\right|\rightarrow\begin{array}{l}2\cdot(1)-(0)+n\cdot(1)=0\\ 2+n=0\end{array}$$

Para que una recta r con $\overrightarrow{v_r}\,(u_1,\ u_2,\ u_3)$ y $P_r\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ se encuentre contenida en un plano π se deben verificar dos condiciones:

1. El vector director de la recta r debe ser perpendicular al vector normal del plano, es decir que el producto escalar entre ellos debe ser cero.

$$v_r\perp n_\pi\rightarrow v_r\bullet n_\pi=0$$

2. Un punto cualquiera de mi recta debe pertenecer al plano, para comprobarlo solo debemos sustituir las coordenadas del punto de la recta en la ecuación del plano y verificar que se cumple la igualdad.



Resolvemos el sistema de ecuaciones formada por $2m+2n-4=0$ y $2+n=0$.

$$\left.\begin{array}{l} 2m+2n-4=0 \\ \\ 2+n=0 \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{l} 2m+2n-4=0 \\ \\ n=-2 \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{l} 2m+2\cdot(-2)-4=0 \\ \\ n=-2 \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{l} m=4 \\ \\ n=-2 \end{array}\right|$$

Solución:

Para $m=4$ y $n=-2$ la recta r se encontrará contenida en el plano π.

2010. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 4.

Considera los puntos $A\,(1,\ 0,\ 2)$, $B\,(-1,\ 2,\ 4)$ y la recta r definida por

$$\frac{x+2}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$$

(a) [1,5 puntos] Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y B.
(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B.

---

a) Si A y B son simétricos respecto del plano π significa que la recta que une dichos punto es perpendicular al plano, $r \perp \pi \rightarrow v_r = n_r$ por lo tanto el vector normal de la recta (definido por los puntos A y B coincidirá con el vector normal del plano) y que el plano se encuentra justo en la mitad del segmento que los une, es decir que un punto del plano es el punto medio definido por A y B.

Primero calculamos el vector normal de mi plano que coincidirá con el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 4) - (1,\ 0,\ 2) =$$

$$= (-1-1,\ 2-0,\ 4-2) =$$

$$= (-2,\ 2,\ 2)$$

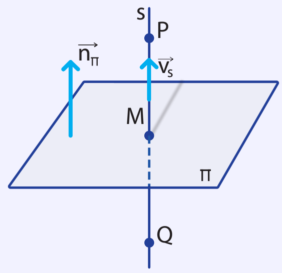
A continuación obtenemos el punto del plano que coincidirá con el punto medio determinado por los puntos facilitados en el ejercicio.

$$P_\pi = M = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\cdot[(1,\ 0,\ 2) + (-1,\ 2,\ 4)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(1+(-1)\,,\ 0+2,\ 2+4) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(0,\ 2,\ 6) = (0,\ 1,\ 3)$$

Para determinar el plano π respecto del cual P y Q son simétricos.



- El plano es perpendicular a la recta definida por dichos puntos.

$$s \perp \pi \rightarrow v_s = n_\pi$$
$$\text{siendo } v_s = PQ$$

- Como los puntos son simétricos respecto del plano, entonces el plano se encuentra a la mitad del segmento que los une, por lo tanto pasa por su punto medio M.

$$P_\pi = M$$
$$\text{siendo } M = \frac{P+Q}{2}$$

- Definimos el plano en forma general.

Como la ecuación general de un plano es de la forma $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, donde las constantes A, B y C representan las componentes de su vector normal, como $\overrightarrow{n_\pi} = (-2,\ 2,\ 2)$ sabemos que $A = -2$, $B = 2$ y $C = 2$, por lo tanto el plano pedido será de la forma:

$$\pi \equiv -2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z + D = 0$$

$$\pi \equiv -2x + 2y + 2z + D = 0$$

Nos falta por determinar D, como debe pasar por el punto $P_\pi\,(0,\ 1,\ 3)$, sabemos que si un punto pertenece a un plano este debe verificar su ecuación, sencillamente sustituimos las coordenadas del punto M en la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -2x + 2y + 2z + D = 0 \\ \\ P_\pi\,(0,\ 1,\ 3) \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} -2 \cdot (0) + 2 \cdot (1) + 2 \cdot (3) + D = 0 \\ \\ D = -8 \end{array}$$

Solución:

La ecuación del plano pedido que cumple con las condiciones indicadas en el enunciado es $\pi \equiv -2x + 2y + 2z - 8 = 0$.

b) Antes de empezar a resolver el ejercicio obtendremos la información de la recta facilitada en forma continua.

Una recta r expresada en forma continua tiene la expresión:

$$r \equiv \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$$

Donde los valores a, b y c representan un punto de la recta pero con el signo cambiado, $P_r = (a,\ b,\ c)$. Mientras que los valores que nos encontramos en el denominador son su vector director. $\overrightarrow{v_r} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$.

$$r \equiv \frac{x+2}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$$

$$r \equiv \frac{x-(-2)}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$$

$$P_r\,(-2,\ 1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 3)$$

La recta r expresada en forma paramétrica es

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si un plano es paralelo a una recta se cumple que el vector director de la recta debe de coincidir con el vector director de mi plano y si este plano contiene a los puntos A y B entonces dichos puntos pertenecen al plano y podemos formar un vector director con ellos.

$$\pi \equiv \begin{cases} r \parallel \pi : & \overrightarrow{v_{1\pi}} = \overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 3) \\ A \in \pi : & P_\pi = A\,(1,\ 0,\ 2) \\ B \in \pi : & P_\pi = B\,(-1,\ 2,\ 4) \end{cases}$$

Podemos definir un plano con dos vectores directores libres y un punto, el vector que nos falta estará formado por vector que une los puntos A y B:

$$\overrightarrow{v_{2\pi}} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 4) - (1,\ 0,\ 2) =$$

$$\overrightarrow{v_{2\pi}} = (-1-1,\ 2-0,\ 4-2) = (-2,\ 2,\ 2)$$

Calculamos el plano pedido:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\pi \equiv = (x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (y)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

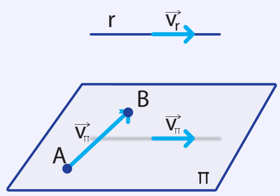
$$\pi \equiv = (x-1)\cdot(-4) - (y)\cdot(10) + (z-2)\cdot(6) =$$

$$\pi \equiv = -4x + 4 - 10y + 6z - 12 = -4x - 10y + 6z - 8 = 0$$

Simplificamos el plano obtenido dividiéndolo entre -2

$$\pi \equiv 2x + 5y - 3z + 4 = 0$$

Si un plano es paralelo a una recta entonces sabemos que el vector director de la recta coincidirá con uno de los vectores directores del plano, además si un plano contiene a dos puntos sabemos que un vector directo del plano coincidirá con el vector formado por dichos puntos.



La ecuación general de un plano formado por sus vectores directores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y un punto $P\,(a, b, c)$, se obtine como:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

La ecuación del plano pedido que cumple con las condiciones indicadas en el enunciado es $\pi \equiv 2x + 5y - 3z + 4 = 0$.

2010. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 4.

Considera los puntos $A\,(1,\ 1,\ 1)$, $B\,(0,\ -2,\ 2)$, $C\,(-1,\ 0,\ 2)$ y $D\,(2,\ -1,\ 2)$.

(a) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

(b) [1,5 puntos] Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.

---

a) El volumen de un tetraedro podemos calcularlo mediante la siguiente expresión

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) \right| \tag{1}$$

Para ello debemos de obtener $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right)$ y $\left| \overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) \right|$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ -2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (-1,\ -3,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,\ 0,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (-2,\ -1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (2,\ -1,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ -2,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_3]{F_1 = F_1 - F_3} \begin{vmatrix} -2 & -1 & \cancel{0} \\ -3 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{1} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) \right| = |-5| = 5$$

Sustituimos los datos en la expresión del volumen (1)

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}\, u^3$$

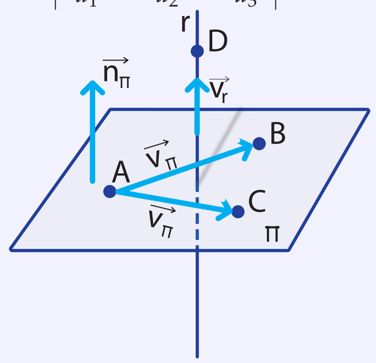
Solución:

El volumen del tetraedro pedido en el enunciado es $\frac{5}{6}\, u^3$.

b) Antes de comenzar necesitamos crear el plano formado por los puntos A, B y C, para ello usaremos como vectores directores del plano los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, calculados en el apartado anterior y como un punto del plano el punto A.

La ecuación general de un plano formado por sus vectores directores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y un punto $P\,(a, b, c)$, se obtiene como:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$



$$\overrightarrow{v_{1\pi}} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ -3,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v_{2\pi}} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,\ -1,\ 1)$$

Calculamos el plano pedido:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot(-2) - (y-1)\cdot(1) + (z-1)\cdot(-5) =$$

$$= -2x + 2 - y + 1 - 5z + 5 = -2x - y - 5z + 8 = 0$$

Como la recta r debe ser perpendicular al plano π, el vector normal del plano debe de coincidir con el vector director de la recta, y también debe pasar por el punto $D\,(2,\ -1,\ 2)$ entonces dicho punto será un punto de mi recta.

$$r \equiv \begin{cases} r \perp \pi : & \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (-2,\ -1,\ -5) \\ D \in r : & P_r = D\,(2,\ -1,\ 2) \end{cases}$$

La ecuación en forma paramétrica de la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2 \cdot \lambda \\ y = -1 - 1 \cdot \lambda \\ z = 2 - 5 \cdot \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 5\lambda \end{array}$$

Solución:

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano formado por los puntos A, B y C es $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 5\lambda \end{cases}$

2010. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 4.

Sean los puntos $A\,(2,\ \lambda,\ \lambda)$, $B\,(-\lambda,\ 2,\ 0)$ y $C\,(0,\ \lambda,\ \lambda-1)$.
a) [1 punto] ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justifique la respuesta.
b) [1,5 puntos] Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

---

a) Creamos dos vectores partiendo desde un mismo punto que serán en nuestro caso $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Dos vectores son $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son paralelos sin son proporcionales, por tanto deben de cumplir la siguiente condición.

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-\lambda,\ 2,\ 0) - (2,\ \lambda,\ \lambda) =$$

$$= (\lambda - 2,\ 2-\lambda,\ -\lambda)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ \lambda,\ \lambda - 1) - (2,\ \lambda,\ \lambda) =$$

$$= (-2,\ 0,\ -1)$$

Si los tres puntos se encuentran alineados entonces los vectores formados entre ellos deben de ser paralelos, es decir proporcionales, por lo tanto

$$\frac{\lambda - 2}{-2} = \frac{2-\lambda}{0} = \frac{-\lambda}{-1}$$

Tenemos una triple igualdad que resolveremos igualando dos a dos.

$$\frac{\lambda-2}{-2} = \frac{2-\lambda}{0} \longrightarrow 0\cdot(\lambda-2) = -2\cdot(2-\lambda)\,;\ \ -4+2\lambda = 0 \to \lambda = 2$$

$$\frac{2-\lambda}{0} = \frac{-\lambda}{-1} \longrightarrow -1\cdot(2-\lambda) = 0\cdot(-\lambda)\,;\ \ -2+\lambda = 0 \to \lambda = 2$$

Hemos obtenido la misma solución por lo tanto es válida.

Solución:

Los tres puntos estarán alineados para $\lambda = 2$.

b) Para $\lambda = 1$ tenemos los siguientes puntos

$$A\,(2,\ 1,\ 1)\,,\ B\,(-1,\ 2,\ 0)\ \text{y}\ C\,(0,\ 1,\ 0)$$

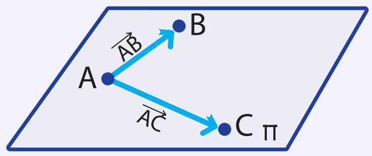
Para formar un plano con tres puntos estos no deben estar alineados, condición que no hace falta que comprobemos puesto que el enunciado nos dice que dichos puntos conforman un triangulo y para que ocurra los puntos no deben estar alineados, debemos obtener dos vectores libres, por ejemplo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 0) - (2,\ 1,\ 1) =$$

$$= (-1-2,\ 2-1,\ 0-1) = (-3,\ 1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 1,\ 0) - (2,\ 1,\ 1) =$$

$$= (0-2,\ 1-1,\ 0-1) = (-2,\ 0,\ -1)$$



Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores directores de un plano y $A\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ un punto de este, podemos expresar el plano en forma general mediante la siguiente expresión

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

La distancia de un punto $A\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ se puede calcular como

$$dist\,(A,\ \pi) = \frac{|A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C \cdot a_3 + D|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Los vectores calculados son los vectores directores del plano pedido y uno de los puntos, que para facilitarnos los cálculos elegiremos el punto C (Como en el enunciado nos preguntan la distancia entre un punto y un plano para aplicar la expresión de la distancia necesitamos el plano en forma general).

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot (-1) - (y-1) \cdot (3-2) + z \cdot 2 = -x - y + 1 + 2z \rightarrow \pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$$

Para calcular la distancia desde el origen de coordenadas, $O\,(0,\ 0,\ 0)$, al plano $\pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$ aplicaremos la expresión de la distancia de un punto a un plano.

$$dist\,(O,\ \pi) = \frac{|-1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,u = \frac{\sqrt{6}}{6}\,u$$

Solución:

El plano formado por los tres puntos dados en el enunciado para $\lambda = 1$ es $\pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$ y su distancia al origen de coordenadas es $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,u = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\,u$.