Bloque 6: Espacio Euclideo

Ángulos 2010

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 4.

Considera las rectas r y s de ecuaciones

$$x-1=y=1-z \quad y \quad \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

a) [0,75 puntos] Determina su punto de corte.
b) [1 punto] Halla el ángulo que forman r y s.
c) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

Antes de resolver ninguno de los apartados expresaremos la recta r y s en forma paramétrica para facilitarnos los cálculos y extraer de ella toda la información que podamos.

En el caso de la recta r, obtenemos un punto y un vector director.

$r \equiv x-1=y=1-z$

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-(0)}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

$P_r\,(1,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ -1)$

La recta r expresada en forma paramétrica es

$$r \equiv \begin{cases} x=1+1\cdot\theta \\ y=0+1\cdot\theta \quad \text{con } \theta\in\mathbb{R} \\ z=1-1\cdot\theta \end{cases}$$

Una recta r expresada en forma implícita (dos panos que se cortan) tiene la siguiente expresión.

$$r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

La convertimos a forma paramétrica resolviendo el sistema formado por ambos planos, simplemente sustituyendo a una de las incógnitas por un parámetro.

Si alguna de las incógnitas falta será a ella a la que le impongamos el parámetro.

Una recta r expresada en forma continua tiene la siguiente expresión.

$$r \equiv \frac{x-a}{v_1}=\frac{y-b}{v_2}=\frac{z-c}{v_3}$$

Donde los valores a, b y c representan un punto de la recta pero con el signo opuesto, $P_r = (a,\ b,\ c)$, mientras que los valores del denominador son las coordenadas de su vector director, $v_r=(v_1,\ v_2.\ v_3)$.

En el caso de la recta s, resolveremos el sistema dándole a y el valor de λ.

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad y = \lambda \quad \left| \rightarrow \begin{array}{l} x - 2y = -1 \\ y = \lambda \\ y + z = 1 \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} x - 2\lambda = -1 \\ y = \lambda \\ \lambda + z = 1 \end{array} \left| \rightarrow \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right|$$

La recta s expresada en forma paramétrica es

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \begin{array}{l} x = -1 + 2 \cdot \lambda \\ y = 0 + 1 \cdot \lambda \\ z = 1 - 1 \cdot \lambda \end{array} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} P_s\,(-1,\ 0,\ 1) \\ \\ \overrightarrow{v_s} = (2,\ 1,\ -1) \end{cases}$$

a) Para determinar el punto de corte entre dos rectas, solo debemos resolver el sistema formado por ellas, igualando sus coordenadas dos a dos.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \theta \\ y = \theta \\ z = 1 - \theta \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \theta = -1 + 2\lambda; \theta - 2\lambda = -2 \\ \theta = \lambda \\ 1 - \theta = 1 - \lambda; \theta = \lambda \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema obtenido, dando nos cuenta que las dos ultimas ecuaciones son iguales.

$$\begin{array}{l} \theta - 2\lambda = -2 \\ \theta = \lambda \end{array} \left| \rightarrow \begin{array}{l} \theta - 2\theta = -2 \\ \theta = \lambda \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} \theta = 2 \\ \theta = \lambda \end{array} \left| \rightarrow \right.$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} \theta = 2 \\ \lambda = 2 \end{array} \Bigg|$$

Sea una recta r en forma paramétrica

$$r \equiv \begin{cases} x = a + v_1\lambda \\ y = b + v_2\lambda \\ z = c + v_3\lambda \end{cases}$$

Su punto genérico G_r es el formado por propias ecuaciones de la recta.

$$G_r\,(a + v_1\lambda,\ b + v_2\lambda,\ c + v_3\lambda)$$

Dos vectores son $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son perpendiculares si su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \text{ si } \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$$

Se trata de un Sistema Compatible Determinado, al obtener una única solución para cada una de las incógnitas, por lo tanto ambas rectas se cortan en un único punto, para determinarlo sustituimos $\theta = 2$ en la recta r o $\lambda = 2$ en la recta s (en ambos casos debe darnos el mismo punto).

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \theta \\ y = \theta \\ z = 1 - \theta \end{array} \right. \quad \theta = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 - 2 = -1 \end{array} \quad \rightarrow I\,(3,\ 2,\ -1)$$

Solución:

El punto de intersección entre las rectas r y s es $I\,(3,\ 2,\ -1)$.

b) Determinamos el ángulo formado por dos rectas secantes (gracias al apartado anterior sabemos que las dos rectas son secantes puesto que solo tienen un único punto en común) mediante la definición geométrica del producto escalar usando sus vectores directores, calculados al inicio del ejercicio.

$$\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right| = \left\|\overrightarrow{v_r}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_s}\right\| \cdot cos\left(\widehat{v_r v_s}\right)$$

$$cos\left(\widehat{v_r v_s}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right|}{\left\|\overrightarrow{v_r}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_s}\right\|}$$

$$\widehat{v_r v_s} = arcos\left(\frac{\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right|}{\left\|\overrightarrow{v_r}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_s}\right\|}\right) \tag{1}$$

La definición geométrica del producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ es

$$\left|\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}\right| = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cdot cos\left(\widehat{uv}\right)$$

donde

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$
$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Calculamos $\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right|$, $\left\|\overrightarrow{v_r}\right\|$ y $\left\|\overrightarrow{v_s}\right\|$.

$$\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s} = (1,\ 1,\ -1) \bullet (2,\ 1,\ -1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 4$$

$$\left|\overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{v_s}\right| = |4| = 4$$

$$\left\|\overrightarrow{v_r}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\left\|\overrightarrow{v_s}\right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Sustituimos los datos en (1) para obtener el ángulo pedido.

$$\widehat{\vec{v_r}\vec{v_s}} = arcos\left(\frac{4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}\right) = arcos\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right) \approx 19,4712^{o}$$

Solución:

El ángulo que forman las rectas r y s es $19,4712^{o}$.

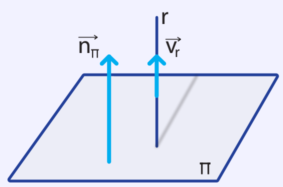
c) Para determinar un plano necesitamos un puntos y sus dos vectores directores, en este caso el plano contiene a las rectas r y s por tanto los vectores directores de la recta coincidirán con los vectores directores del plano y cualquier punto de las rectas será un punto de mi plano, por lo tanto

$$\pi \begin{cases} r \subset \pi \rightarrow \begin{cases} P_\pi = P_r\,(1,\ 0,\ 1) \\ \vec{v_\pi} = \vec{v_r} = (1,\ 1,\ -1) \end{cases} \\ s \subset \pi \rightarrow \begin{cases} P_\pi = P_s\,(-1,\ 0,\ 1) \\ \vec{v_\pi} = \vec{v_s} = (2,\ 1,\ -1) \end{cases} \end{cases}$$

Definimos el plano pedido en forma vectorial usando los vectores directores de las rectas y por ejemplo el punto de la recta r, aunque daría igual a ver usado el de la recta r o el punto de intersección entre las rectas calculado en el apartado a)

$\pi \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 1) + \alpha\,(1,\ 1,\ -1) + \beta\,(2,\ 1,\ -1)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Para definir un plano formado por dos rectas que se cortan sabemos



i) El vector directo de la recta r siempre coincidirá con un vector director del plano que lo contiene.
ii) El vector director de la recta s siempre coincidirá con un vector director del plano que lo contiene.
iii) Un punto de cualquiera de las rectas coincidirá con un punto del plano que las contiene.

Solución:

El plano que contiene a las rectas r y s es $\pi \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 1) + \alpha\,(1,\ 1,\ -1) + \beta\,(2,\ 1,\ -1)\,, con \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.