Bloque 1: Matrices y Determinantes

Rango 2010

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

[2,5 puntos] Obtén un vector no nulo $v = (a,\ b,\ c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

a) Como ambas matrices son cuadradas de orden 3 distintas de la matriz nula y su rango se encontrará comprendido entre 1 y 3.

> El rango nos indica el número de filas o columnas que son linealmente independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|A| = 0$ existe combinación lineal entre ellas.

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

Pero si observamos detenidamente tanto en la matriz A como en la B, existe un menor de orden 2 que no depende de ninguno de los parámetros, cuyo determinantes es distinto de cero, así que $r(A) = r(B) \geq 2, \forall a,\ b\ c \in \mathbb{R}$.

Para la matriz A tenemos el siguiente menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \to r(A) \geq 2$$

Mientras que para la matriz B nuestro menor es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -2 \neq 0 \to r(B) \geq 2$$

El enunciado nos impone que deben tener el rango 2 para ello ambos determinantes deben ser cero, $|A| = |B| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cancel{a} \\ 1 & 0 & \cancel{b} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{c-a} \end{vmatrix} = (c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -c + a$$

Imponemos la condición $|A| = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcl} |A| & = & -c + a \\ |A| & = & 0 \end{array}\right| \quad -c + a = 0 \to a = c$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} = \begin{vmatrix} 2 & \cancel{0} & a \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{b} \\ 3 & \cancel{0} & c+b \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & c+b \end{vmatrix} = (-1) \cdot [2 \cdot (c+b) - 3 \cdot a] =$$

$$|B| = 3a - 2b - 2c$$

Imponemos la condición $|B| = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcl} |B| & = & 3a-2b-2c \\ |B| & = & 0 \end{array}\right| \; 3a - 2b - 2c = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido para obtener el vector que necesitamos, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado al tener más ecuaciones que incógnitas y ser ambas ecuaciones linealmente independientes, para resolverlo sustituimos una de las incógnitas por un parámetro, por ejemplo θ, en nuestro caso $c = \theta$.

$$\left\{\begin{array}{c} a = c \\ 3a - 2b - 2c = 0 \\ c = \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = \theta \\ 3\theta - 2b - 2\theta = 0 \\ z = \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = \theta \\ b = \dfrac{\theta}{2} \\ z = \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rc} a = & \theta \\ b = & \dfrac{\theta}{2} \\ c = & \theta \end{array}\right. \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Solución:

El vector pedido para que ambas matrices tengan el mismo rango es $v = \left(\theta,\ \frac{\theta}{2},\ \theta\right) \forall \theta \in \mathbb{R}$.