Bloque 4: Ánalisis

Problemas de Optimización 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

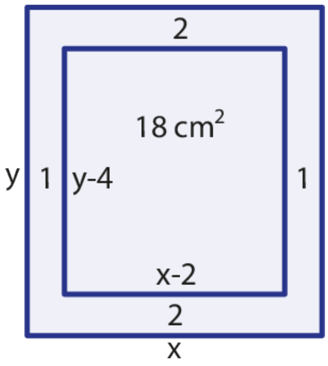
Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Realizamos un boceto para poder definir el rectángulo pedido.



F. Objetivo: Área mínima del rectángulo, así el gasto en superficie será lo más pequeño posible.

$$A\left(x,\ y\right) = x \cdot y$$

Restricción: Superficie de texto 18 cm^2.

$$18 = (y - 2 - 2) \cdot (x - 1 - 1)$$

$$18 = (y - 4) \cdot (x - 2)$$

De la restricción despejamos la variable y y la sustituimos en la función objetivo.

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

$$18 = (y - 4) \cdot (x - 2)\ ;\ \frac{18}{(x-2)} = y - 4;\ \ y = \frac{18}{(x-2)} + 4 \rightarrow A\left(x\right) = x \cdot \left(\frac{18}{(x-2)} + 4\right)$$

Calculamos $A'(x)$.

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{18}{(x-2)} + 4 \right) = \frac{18x}{x-2} + 4x$$

$$A'(x) = \frac{18 \cdot (x-2) - 18x \cdot 1}{(x-2)^2} + 4 = \frac{\cancel{18x} - 36 \cancel{- 18x}}{(x-2)^2} - 4 = -\frac{36}{(x-2)^2} + 4$$

Imponemos la condición $A'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} A'(x) & = - & \dfrac{36}{(x-2)^2} + 4 \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad -\frac{36}{(x-2)^2} + 4 = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$-\frac{36}{(x-2)^2} + 4 = 0; \quad \frac{36}{(x-2)^2} = 4; \quad 36 = 4 \cdot (x-2)^2$$

$$36 = 4 \cdot \left(x^2 + 4 - 4x\right); \quad 36 = 4x^2 + 16 - 16x; \quad 4x^2 - 16x - 20 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-20)}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm 24}{8} \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & -1 \\ x_2 = & 5 \end{array} \right.$$

De las dos soluciones obtenidas, rechazamos $x_1 = -1$ al ser negativa, las dimensiones de los lados un rectángulo no pueden tomar valores negativos, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = 5$ sea un mínimo.

$$A'(x) = -\frac{36}{(x-2)^2} + 4$$

$$A''(x) = -\frac{\cancel{0 \cdot (x-2)^2} - 36 \cdot [2 \cdot (x-2) \cdot 1]}{(x-2)^4} = \frac{72 \cdot (x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{72}{(x-2)^3}$$

$$A''(5) = \frac{72}{(5-2)^3} = \frac{8}{3} > 0$$

Por tanto para $x = 5$ tenemos nuestro mínimo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la altura de nuestro rectángulo.

Para $x = 5 \rightarrow y = \dfrac{18}{(5-2)} + 4 = 10$

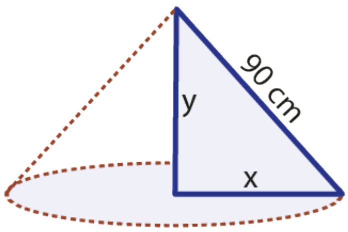
Solución:

Las dimensiones de la hoja de papel que cumple las condiciones impuestos en el enunciado son 5 cm de base y 10 cm de altura.

2010. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] La hipotenusa de un triangulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triangulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triangulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recuerda que el volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Realizamos un boceto para poder definir el triangulo rectángulo pedido.



F. Objetivo: Volumen máxima del cono, para determinarlo usaremos el volumen de un cono facilitado en el enunciado.

$$V(x,\ y) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot y$$

Restricción: Su hipotenusa sea 90 centímetros, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$90^2 = x^2 + y^2$$

De la restricción despejamos podemos despejar una de las variables, en este caso al tener en la función objetivo y en la restricción la variable x^2, despejaremos dicha variable para que sea más sencillo, sustituyéndola en la función objetivo.

> Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:
>
> - Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
> - Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
> - Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
> - A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
> - Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
>   - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
>   - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

$$90^2 = x^2 + y^2;\ x^2 = 8100 - y^2 \rightarrow V(y) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(8100 - y^2\right) \cdot y$$

Calculamos $V'(x)$.

$$V(y)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(8100-y^2\right)\cdot y=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\left(8100-y^2\right)\cdot y\right]$$

$$V'(y)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[-2y\cdot y+\left(8100-y^2\right)\cdot 1\right]=\frac{\pi}{3}\cdot\left(-3y^2+8100\right)$$

Imponemos la condición $V'(y)=0$

$$\left.\begin{array}{rcc} A'(x) & = & \frac{\pi}{3}\cdot\left(-3y^2+8100\right) \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \frac{\pi}{3}\cdot\left(-3y^2+8100\right)=0\rightarrow\left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}\neq 0 \text{ no válida} \\ -3y^2+8100=0 \end{array}\right.$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$-3y^2+8100=0\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{8100}{3}}=\pm\sqrt{2700}\left\{\begin{array}{rcr} y_1 & = & -30\sqrt{3} \\ y_2 & = & 30\sqrt{3} \end{array}\right.$$

De las dos soluciones obtenidas, rechazamos $y_1=-30\sqrt{3}$ al ser negativa, las dimensiones de los catetos de un rectángulo no pueden tomar valores negativos, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $y=30\sqrt{3}$ sea un máximo.

$$V'(y)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(-3y^2+8100\right)\rightarrow V''(y)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(-6y^2\right)=-2\pi y^2$$

$$V''\left(30\sqrt{3}\right)=-2\pi\left(30\sqrt{3}\right)^2<0$$

Por tanto para $y=30\sqrt{3}$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor del cateto que nos falta.

Para $y=30\sqrt{3}\rightarrow x=\sqrt{8100-\left(30\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8100-\left(30\sqrt{3}\right)^2}=30\sqrt{6}$

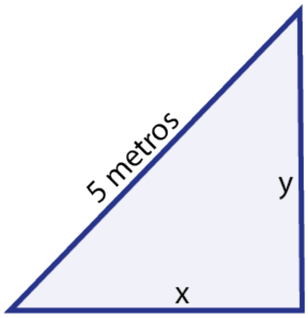
Solución:

Los valores de los catetos del triangulo rectángulo que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son $30\sqrt{3}$ y $30\sqrt{6}$ centímetros cada uno de ellos.

2010. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

Realizamos un boceto para poder definir el triangulo rectángulo pedido.



F. Objetivo: Área máxima del triángulo, para determinarlo usaremos al área de un triangulo.

$$A\left(x,\ y\right)=\frac{x\cdot y}{2}$$

Restricción: Su hipotenusa sea 5 metros, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$h^2=c_1^2+c_2^2$$

$$5^2=x^2+y^2$$

De la restricción despejamos la variable y y la sustituimos en la función objetivo.

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f'=0$, obteniendo los puntos críticos $x=a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''\left(x\right)$:
  - Si $f''\left(a\right)<0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x=a$.
  - Si $f''\left(a\right)>0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x=a$.

$$5^2=x^2+y^2;\ y=\sqrt{25-x^2}\rightarrow A\left(x\right)=\frac{x\cdot\sqrt{25-x^2}}{2}$$

Calculamos $A'(x)$.

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{25-x^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[x \cdot \sqrt{25-x^2}\right]$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 \cdot \sqrt{25-x^2} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{25-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right]$$

Imponemos la condición $A'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} A'(x) & = & \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right] \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right] = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2} \neq 0 \text{ no válida} \\ \sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} = 0 \end{array}\right.$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} = 0; \quad \sqrt{25-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}; \quad \left(\sqrt{25-x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{25-x^2}\right) = x^2$$

$$\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 = x^2; \quad 25 - x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 25 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{2}} = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \left\{\begin{array}{l} x_1 = -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

De las dos soluciones obtenidas, rechazamos $x_1 = -\frac{5}{\sqrt{2}}$ al ser negativa, las dimensiones de los catetos de un rectángulo no pueden tomar valores negativos, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ sea un máximo.

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right]$$

$$A''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{25-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) - \frac{2x \cdot \sqrt{25-x^2} - x^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{25-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)}{\sqrt{25-x^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} - \frac{2x \cdot \sqrt{25-x^2} + \frac{x^3}{\sqrt{25-x^2}}}{\sqrt{25-x^2}}\right]$$

$$A''\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}}{\sqrt{25-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}}-\frac{2\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{25-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^3}{\sqrt{25-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}}}{\sqrt{25-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]<0$$

Por tanto para $x=\frac{5}{\sqrt{2}}$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor del cateto que nos falta.

Para $x=\frac{5}{\sqrt{2}}\rightarrow y=\sqrt{25-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

Solución:

Los valores de los catetos del triangulo rectángulo que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son $\frac{5}{\sqrt{2}}$ metros cada uno de ellos.