Bloque 4: Análisis

Funciones con Parámetros 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x}$ para $x \neq a$.

a) [1,5 puntos] Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,\ 3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.

b) [1 punto] Para el caso $a = 2$, $b = 3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

---

a) Necesitamos plantear dos condiciones para obtener los valores de los parámetros pedidos:

Si la gráfica de f pasa por el punto $(2,\ 3)$, entonces sabemos que cuando la $x = 2$ su imagen vale 3, por lo tanto

$$f(2) = 3 \qquad (1)$$

Si la gráfica de f tiene una asíntota oblicua con $m = -4$ entonces

$$-4 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (2)$$

> Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de una función $y = f(x)$si:
>
> - $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, siendo $m \neq 0,\ \pm\infty$
> - $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$, siendo $n \in \mathbb{R}$
>
> Si la gráfica de f pasa por le punto $(a,\ b)$, sabemos que
>
> $$f(a) = b$$

De la primera condición (**??**) podemos obtener el valor a.

$$-4 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+b}{a-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{ax-x^2} = \frac{\infty}{\infty}\,\text{IND} \xrightarrow[gn=gd]{R.G} \frac{a}{-1}$$

Como el valor del límite debe valer -4, entonces $\dfrac{a}{-1} = -4 \to a = 4$

A continuación aplicamos la condición (1) para $a = 4$, para obtener el valor de la constante que nos falta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x} \\ f(2) = \dfrac{4\cdot 2^2+b}{4-2} \\ f''(2) = 3 \end{array}\right| \to \begin{array}{r} \dfrac{4\cdot 2^2+b}{4-2} = 3 \\ 16 + b = 6 \\ b = -10 \end{array}$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a = 4$ y $b = -10$.

b) Para $a=2$ y $b=3$ nuestra función es

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{2-x}\text{ para } x\neq 2$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$ tiene la siguiente expresión:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1) \tag{3}$$

Necesitamos calcular $f(1)$, $f'(x)$ y posteriormente $f'(1)$.

$$f(1)=\frac{2\cdot 1^2+3}{2-1}=5$$

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(2-x)-\left(2x^2+3\right)\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{8x-4x^2+2x^2+3}{(2-x)^2}=\frac{-2x^2+8x+3}{(2-x)^2}$$

$$f'(1)=\frac{-2\cdot 1^2+8\cdot 1+3}{(2-1)^2}=9$$

Ahora que ya tenemos todo lo necesario sustituimos en la expresión de la recta tangente (3).

$y-5=9\cdot(x-1)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y-5=9\cdot(x-1)\,;\;\; y=9x-9+5\rightarrow y=9x-4$

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$ es $y=9x-4$.

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^x\left(x^2+ax\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3.

Si f es derivable en $x = a$ si verifica:

- Es continua en $x = a$, que se verificará si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:
  - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
  - Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, para ello los límites laterales deben de coincidir, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \to \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.
  - El límite sea igual al valor de la función, $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'\left(a^-\right) = f'\left(a^+\right)$.

Si la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = b$ tiene pendiente $m = k$, entonces $f'(b) = k$ porque la derivada de f en un punto es la pendiente de la tangente a la curva.

Para poder determinar las constantes pedidas necesitamos establecer dos condiciones, la primera de ellas es doble puesto que la función debe ser derivable es condición indispensable que sea continua y para que su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente $m = 3$ entonces $f'(1) = 3$.

Empezamos estableciendo la condición de derivabilidad estudiándola en el un único punto conflictivo en $x = 0$, al tratarse de un punto donde pasamos de una función a otra. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos de la función es continua y derivable en su dominio.

Estudiamos continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = e^0\left(0^2 + a\cdot 0\right) = 1\cdot(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^x\left(x^2+ax\right) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{bx^2+c}{x+1} = \frac{b\cdot 0^2+c}{0+1} = c$$

Para que sea continua debe existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos la constante c.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = c = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to c = 0$$

Para $c = 0$, se verifica que $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x = 0$, procedemos a estudiar su derivabilidad calculando previamente su derivada.

$$f(x) = \begin{cases} e^x \left(x^2 + ax\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x \cdot \left(x^2 + ax\right) + e^x \cdot (2x + a) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2bx \cdot (x+1) - bx^2 \cdot 1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x \cdot \left(x^2 + ax + 2x + a\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x = 0$:

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} e^x \cdot \left(x^2 + ax + 2x + a\right) = e^0 \cdot \left(0^2 + a \cdot 0 + 2 \cdot 0 + a\right) = 1 \cdot (0 + a) = a$$

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2} = \frac{b \cdot 0^2 + 2b \cdot 0}{(0+1)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Para que sea derivable los limites laterales deben de coincidir, igualamos ambos límites, obteniendo el valor de la constante a.

$$f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right)$$

$$a = 0$$

Ahora solo tenemos que aplicar la última de las condiciones $f'(1) = 3$, al tratarse de una función a trozos seleccionaremos aquella que tome el valor $x = 1$, que en nuestro caso será $f'(x) = \dfrac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2}$.

$$\left.\begin{array}{rc} f'(x) = & \dfrac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2} \\ f'(1) = & \dfrac{b \cdot 1^2 + 2b \cdot 1}{(1+1)^2} \\ f'(1) = & 3 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} \dfrac{b \cdot 1^2 + 2b \cdot 1}{(1+1)^2} = 3 \\ \dfrac{b + 2b}{4} = 3 \\ b = 4 \end{array}$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a = 0$, $b = 4$ y $c = 0$.

2010. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = asen(x) + bx^2 + cx + d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto $(0,\ 4)$ y que la segunda derivada de f es $f''(x) = 3sen(x) - 10$.

Para poder determinarla necesitamos obtener el valor de las constantes a, b, c y d, así que debemos plantear 4 condiciones:

Si la gráfica de f tiene una tangente horizontal en el punto $(0,\ 4)$, entonces sabemos que la función pasará por el punto $(0,\ 4)$ y como la derivada en un punto coincide con la pendiente de su recta tangente entonces para $x = 0$ su derivada debe ser nula (las rectas horizontales se caracterizan por ser una línea horizontal cuya pendiente es cero).

Si la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal en el punto $(a,\ b)$, sabemos que se trata de una condición doble.

- $f'(a) = 0$, la derivada de f en un punto es la pendiente de la tangente a la curva, al tratarse de una recta horizontal sabemos que su pendiente es nula.
- $f(a) = b$, en $x = a$ la gráfica f toma el valor b.

$$f'(0) = 0 \tag{1}$$

$$f(0) = 4 \tag{2}$$

Al facilitarnos la segunda derivada, deberemos calcular la segunda derivada de $f(x) = asen(x) + bx^2 + cx + d$ y compararla con $f''(x) = 3sen(x) - 10$ y así obtendremos las dos condiciones restantes.

$f(x) = asen(x) + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = acos(x) + 2bx + c$

$f''(x) = -asen(x) + 2b$ como $f''(x) = 3sen(x) - 10$, entonces

$$-a = 3 \tag{3}$$

$$2b = -10 \tag{4}$$

A continuación aplicamos las cuatro condiciones para determinar los valores de a, b, c y d.

Aplicando las condiciones (3) y (4) podemos determinar el valor de las constantes a y b.

$-a = 3 \rightarrow a = -3$

$2b = -10 \rightarrow b = \dfrac{-10}{2} = -5$

A continuación aplicamos la condición (1) para $a = -3$ y $b = -5$ para obtener el valor de la constante c.

$$\left.\begin{array}{rc} f'(x) = & -3cos(x) + 2bx + c \\ f'(0) = & -3cos(0) + 2b \cdot 0 + c \\ f'(0) = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} -3cos(0) + 2b \cdot 0 + c = 0 \\ -3 + c = 0 \\ c = 3 \end{array}$$

Por último obligamos a que cumpla la condición (2) para $a = -3$, $b = -5$ y $c = 3$ para obtener el valor de la última constante.

$$\left.\begin{array}{rc} f(x) = & -3sen(x) - 5x^2 + 3x + d \\ f(0) = & -3sen(0) - 5 \cdot (0)^2 + 3 \cdot 0 + d \\ f(0) = & 4 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} -3sen(0) - 5 \cdot (0)^2 + 3 \cdot 0 + d = 4 \\ d = 4 \end{array}$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a = -3$, $b = -5$, $c = 3$ y $d = 4$.