Bloque 4: Ánalisis

Continuidad y Derivabilidad 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Considera la función $f : [0,\ 4] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ cx & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determina los valores de a, b y c.
b) [0,75 puntos] Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

La gráfica de f solo presenta un único punto conflictivo en $x = 2$, al tratarse de un punto donde pasamos de una función a otra. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos de la función es continua y derivable en su dominio.

Al indicarnos el enunciado que la función es derivable, es condición indispensable que también sea continua en dicho punto, empezamos estudiando su continuidad.

Estudiamos continuidad en $x = 2$:

$f(2) = 2^2 + a \cdot 2 + b = 4 + 2a + b$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 + ax + b\right) = f(2) = 4 + 2a + b$

$\lim\limits_{x \to 2^+} cx = 2c$

Una función f es derivable en $x = a$ si verifica:

- Es continua en $x = a$, que se verificará si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:
  - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
  - Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, para ello los limites laterales deben de coincidir, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b \to \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
  - El límite sea igual al valor de la función, $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Por tanto si una función es derivable en $x = a$ también es continua, pero si una función es continua puede que sea derivable.

Para que sea continua debe existir $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos una relación entre las variables.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 + 2a + b = 2c = \lim_{x \to 2^+} f(x) \to 2a + b - 2c = -4 \tag{1}$$

Para $2a + b - 2c = -4$, se verifica que $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x = 2$, procedemos a estudiar su derivabilidad calculando previamente su derivada.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ cx & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ c & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} (2x + a) = 2 \cdot 2 + a = 4 + a$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} c = c$$

Para que sea derivable los limites laterales deben de coincidir, igualamos ambos límites, para obtener otra relación entre las variables.

$$f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$4 + a = c; \; a - c = -4 \qquad (2)$$

A continuación aplicamos la ultima de las condiciones que nos la dice directamente el enunciado, $f(0) = f(4)$, para obtener la ultima de las relaciones entre las variables.

$$f(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b = b$$

$$f(4) = c \cdot 4 = 4c$$

$$\text{Como } f(0) = f(4) \to b = 4c \qquad (3)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por (1), (2) y (3).

$$\left. \begin{array}{c} 2a + b - 2c = -4 \\ a - c = -4 \\ b = 4c \end{array} \right| \to \left. \begin{array}{c} 2a + b - 2c = -4 \\ a = -4 + c \\ b = 4c \end{array} \right| \to \left. \begin{array}{c} 2 \cdot (-4 + c) + 4c - 2c = -4 \\ a = -4 + c \\ b = 4c \end{array} \right| \to \begin{array}{c} -8 + 2c + 4c - 2c = -4 \\ a = -4 + c \\ b = 4c \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 4c = 4 \\ a = -4 + c \\ b = 4c \end{array} \Bigg| \rightarrow \begin{array}{c} c = 1 \\ a = -4 + c \\ b = 4c \end{array} \Bigg| \rightarrow \begin{array}{c} c = 1 \\ a = -4 + 1 \\ b = 4 \cdot 1 \end{array} \Bigg| \rightarrow \begin{array}{c} c = 1 \\ a = -3 \\ b = 4 \end{array} \Bigg|$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá con las condiciones impuestas en el enunciado para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$.

b) Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ nuestra función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Gracias al apartado anterior sabemos que para dichos valores la función es continua y derivable en todo su dominio. Para estudiar los extremos absolutos calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, al ser una función a trozos igualamos a cero cada uno de ellos, pero solo serán validas los valores de x que se encuentren dentro de su dominio.

Para $0 \leq x \leq 2$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2x - 3 \\ f'(x) & = & 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} 2x - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2}, \text{es valida porque } \frac{3}{2} \in [0,\ 2] \end{array}$$

Para $2 < x \leq 4$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 1 \\ f'(x) & = & 0 \end{array} \Bigg| \; 1 \neq 0 \quad \text{no obtenemos ninguna solución.}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,\ b]$ y derivable $(a,\ b)$ podemos determinar la monotonía si estudiaremos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $(a,\ b)$.
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $(a,\ b)$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando el único punto crítico $x = \frac{3}{2}$, junto con $x = 2$ por ser donde pasamos de una función a otra y sus extremos serán los valores entre los que se encuentra definida, es decir entre 0 y 4.

Intervalos	$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$	$(2,\ 4)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = \frac{3}{2}$ pasamos de decrecer a crecer por tanto tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen para el valor de x para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolos en $f(x)$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{4} = 1{,}75 \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

Como el enunciado nos pide los extremos absolutos, valores máximos y mínimos que alcanza la función, al estar acotada estos pueden alcanzarse en los extremos de acotación, en nuestro caso $x = 0$ y $x = 4$, o en los propios extremos relativos, sencillamente calcularemos la imagen de f en los extremos del intervalo dado y los compararemos con los extremos relativos, aquel que nos de la imagen con el valor más alto será nuestro máximo absoluto mientras que el más bajo será nuestro mínimo absoluto.

> Según el teorema de Weierstrass si una función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos c y d pertenecientes a dicho intervalo donde f alcanza sus valores extremos absolutos.
> Para determinar extremos absolutos o globales nos bastará con calcular las imagen de sus extremos relativos y de los extremos del intervalo, siendo su máximo y mínimo absolutos aquellas con el valor más alto y más bajo respectivamente.

$$f(0) = (0)^2 - 3 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$f(4) = (4)^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 8 \rightarrow \text{Máximo absoluto en el punto } B(4,\ 8)$$

Nuestro máximo absoluto se alcanza en $x = 4$, tomando un valor de 8 y el mínimo absoluto en este caso coincide con el mínimo relativo.

Solución:

$f(x)$ tiene un mínimo relativo que coincide con el mínimo absoluto en $A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

$f(x)$tiene un máximo absoluto en $B(4,\ 8)$.

2010. SUPLENTE SPETIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^x\left(x^2+ax\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3.

Para poder determinar las constantes pedidas necesitamos establecer tres condiciones, la primera de ellas es doble puesto que la función debe ser derivable por ello es condición indispensable que también sea continua, además para que su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente $m = 3$ entonces $f'(1) = 3$.

Empezamos estableciendo la condición de derivabilidad estudiándola en el un único punto conflictivo en $x = 0$, al tratarse de un punto donde pasamos de una función a otra. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos de la función es continua y derivable en su dominio.

Si f es derivable en $x = a$ si verifica:

- Es continua en $x = a$, que se verificará si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:
  - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
  - Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, para ello los límites laterales deben de coincidir, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \to \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.
  - El límite sea igual al valor de la función, $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Si la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = b$ tiene pendiente $m = k$, entonces $f'(b) = k$ porque la derivada de f en un punto es la pendiente de la tangente a la curva.

Estudiamos continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = e^0\left(0^2 + a\cdot 0\right) = 1\cdot(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^x\left(x^2+ax\right) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{bx^2+c}{x+1} = \frac{b\cdot 0^2 + c}{0+1} = c$$

Para que sea continua debe existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos la constante c.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = c = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to c = 0$$

Para $c = 0$, se verifica que $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x = 0$, procedemos a estudiar su derivabilidad calculando previamente su derivada.

$$f(x) = \begin{cases} e^x\left(x^2 + ax\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x \cdot \left(x^2 + ax\right) + e^x \cdot (2x + a) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2bx \cdot (x+1) - bx^2 \cdot 1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x \cdot \left(x^2 + ax + 2x + a\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x = 0$:

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{x\to 0^-} e^x \cdot \left(x^2 + ax + 2x + a\right) = e^0 \cdot \left(0^2 + a \cdot 0 + 2 \cdot 0 + a\right) = 1 \cdot (0 + a) = a$$

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2} = \frac{b \cdot 0^2 + 2b \cdot 0}{(0+1)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Para que sea derivable los limites laterales deben de coincidir, igualamos ambos límites, obteniendo el valor de la constante a.

$$f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right)$$

$$a = 0$$

Ahora solo tenemos que aplicar la última de las condiciones $f'(1) = 3$, al tratarse de una función a trozos seleccionaremos aquella que tome el valor $x = 1$, que en nuestro caso será $f'(x) = \dfrac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2}$.

$$\left.\begin{array}{rc} f'(x) = & \dfrac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2} \\ f'(1) = & \dfrac{b \cdot 1^2 + 2b \cdot 1}{(1+1)^2} \\ f'(1) = & 3 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} \dfrac{b \cdot 1^2 + 2b \cdot 1}{(1+1)^2} = 3 \\ \dfrac{b + 2b}{4} = 3 \\ b = 4 \end{array}$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a = 0$, $b = 4$ y $c = 0$.

2010. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Estudia si continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de f.

La gráfica de f presenta unicamente dos puntos conflictivos en $x = 0$ y $x = 1$, al tratarse de puntos donde pasamos de una función a otra. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos de la función es continua y derivable en su dominio.

Estudiamos continuidad en $x = 0$:

$f(0) = e^0 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} (e^{-x}) = f(0) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} (1 - x^2) = 1 - 0^2 = 1$

Al coincidir los límites laterales entonces podemos afirmar

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \to \exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Una función f es continua en $x = a$ si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
- Existe $\lim_{x \to a} f(x)$, para ello los limites laterales deben de coincidir,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b \to \lim_{x \to a} f(x) = b$$

- El límite sea igual al valor de la función, $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Una función f es derivable en $x = a$ si verifica:

- Es continua en $x = a$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Por tanto si una función es derivable en $x = a$ también es continua, pero si una función es continua puede que sea derivable.

Como el valor del límite coincide con el de la imagen, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(x) = 1$, podemos concluir que $f(x)$ es continua en $x = 0$ y estudiaremos su derivabilidad en dicho punto, no sin antes terminar de estudiar su continuidad en el punto que nos falta.

Estudiamos continuidad en $x = 1$:

$$f(1) = \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \left(1 - x^2\right) = 1 - 1^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{x+1}\right) = f(1) = 1$$

Al no coincidir los límites laterales entonces podemos afirmar

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \to \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Al no verificarse la existencia del límite en dicho punto al no coincidir los límites laterales podemos concluir que la función no es continua en $x = 1$, presentando una discontinuidad inevitable de salto finito, al no ser continua en dicho punto tampoco cumple la primera de las condiciones de derivabilidad y por tanto no es derivable en $x = 1$.

A continuación procedemos a estudiar su derivabilidad en el único caso posible, $x = 0$, calculando previamente sus derivadas.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{0\cdot(x+1) - 2\cdot 1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x = 0$:

$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} -e^{-x} = -e^0 = -1$

$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} -2x = -2 \cdot 0 = 0$

Como las derivadas laterales no coinciden, $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 0$, entonces la función no es derivable en $x = 0$.

Solución:

La gráfica de f es continua para $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, presentando una discontinuidad inevitable de salto finito para $x = 1$.

La gráfica de f es derivable para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$.

La primera derivada de f es $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$