Bloque 4: Ánalisis

Asíntotas,

Puntos Críticos,

Monotonía y Curvatura 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Considera la función $f : [0,\ 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ cx & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determina los valores de a, b y c.
b) [0,75 puntos] Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

La gráfica de f solo presenta un único punto conflictivo en $x = 2$, al tratarse de un punto donde pasamos de una función a otra. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos de la función es continua y derivable en su dominio.

Al indicarnos el enunciado que la función es derivable, es condición indispensable que también sea continua en dicho punto, empezamos estudiando su continuidad.

Estudiamos continuidad en $x = 2$:

$f(2) = 2^2 + a \cdot 2 + b = 4 + 2a + b$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 + ax + b\right) = f(2) = 4 + 2a + b$

$\lim\limits_{x \to 2^+} cx = 2c$

Una función f es derivable en $x = a$ si verifica:

- Es continua en $x = a$, que se verificará si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:
  - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
  - Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, para ello los límites laterales deben de coincidir, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b \rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
  - El límite sea igual al valor de la función, $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Por tanto si una función es derivable en $x = a$ también es continua, pero si una función es continua puede que sea derivable.

Para que sea continua debe existir $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos una relación entre las variables.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 + 2a + b = 2c = \lim_{x \to 2^+} f(x) \rightarrow 2a + b - 2c = -4 \tag{1}$$

Para $2a+b-2c=-4$, se verifica que $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x=2$, procedemos a estudiar su derivabilidad calculando previamente su derivada.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ cx & \text{si} \quad 2<x\le 4 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ c & \text{si} \quad 2<x\le 4 \end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x=2$:

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}(2x+a)=2\cdot 2+a=4+a$$

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+} c=c$$

Para que sea derivable los limites laterales deben de coincidir, igualamos ambos límites, para obtener otra relación entre las variables.

$$f'(2^-)=f'(2^+)$$

$$4+a=c;\ a-c=-4 \tag{2}$$

A continuación aplicamos la ultima de las condiciones que nos la dice directamente el enunciado, $f(0)=f(4)$, para obtener la ultima de las relaciones entre las variables.

$$f(0)=0^2+a\cdot 0+b=b$$

$$f(4)=c\cdot 4=4c$$

$$\text{Como } f(0)=f(4)\to b=4c \tag{3}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por (1), (2) y (3).

$$\left.\begin{array}{c} 2a+b-2c=-4 \\ a-c=-4 \\ b=4c \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{c} 2a+b-2c=-4 \\ a=-4+c \\ b=4c \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{c} 2\cdot(-4+c)+4c-2c=-4 \\ a=-4+c \\ b=4c \end{array}\right| \to \begin{array}{c} -8+2c+4c-2c=-4 \\ a=-4+c \\ b=4c \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 4c = 4 \\ a = -4 + c \\ b = 4c \end{array} \Bigg| \rightarrow \begin{array}{c} c = 1 \\ a = -4 + c \\ b = 4c \end{array} \Bigg| \rightarrow \begin{array}{c} c = 1 \\ a = -4 + 1 \\ b = 4 \cdot 1 \end{array} \Bigg| \rightarrow \begin{array}{c} c = 1 \\ a = -3 \\ b = 4 \end{array} \Bigg|$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá con las condiciones impuestas en el enunciado para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$.

b) Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ nuestra función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Gracias al apartado anterior sabemos que para dichos valores la función es continua y derivable en todo su dominio. Para estudiar los extremos absolutos calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, al ser una función a trozos igualamos a cero cada uno de ellos, pero solo serán validas los valores de x que se encuentren dentro de su dominio.

Para $0 \le x \le 2$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2x - 3 \\ f'(x) & = & 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} 2x - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2}, \text{es valida porque } \frac{3}{2} \in [0,\ 2] \end{array}$$

Para $2 < x \le 4$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 1 \\ f'(x) & = & 0 \end{array} \Bigg| \; 1 \neq 0 \quad \text{no obtenemos ninguna solución.}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,\ b]$ y derivable $(a,\ b)$ podemos determinar la monotonía si estudiaremos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $(a,\ b)$.
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $(a,\ b)$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando el único punto crítico $x = \frac{3}{2}$, junto con $x = 2$ por ser donde pasamos de una función a otra y sus extremos serán los valores entre los que se encuentra definida, es decir entre 0 y 4.

Intervalos	$(0,\ \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2},\ 2)$	$(2,\ 4)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = \frac{3}{2}$ pasamos de decrecer a crecer por tanto tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen para el valor de x para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolos en $f(x)$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{4} = 1{,}75 \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

Como el enunciado nos pide los extremos absolutos, valores máximos y mínimos que alcanza la función, al estar acotada estos pueden alcanzarse en los extremos de acotación, en nuestro caso $x = 0$ y $x = 4$, o en los propios extremos relativos, sencillamente calcularemos la imagen de f en los extremos del intervalo dado y los compararemos con los extremos relativos, aquel que nos de la imagen con el valor más alto será nuestro máximo absoluto mientras que el más bajo será nuestro mínimo absoluto.

> Según el teorema de Weierstrass si una función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos c y d pertenecientes a dicho intervalo donde f alcanza sus valores extremos absolutos.
> Para determinar extremos absolutos o globales nos bastará con calcular las imagen de sus extremos relativos y de los extremos del intervalo, siendo su máximo y mínimo absolutos aquellas con el valor más alto y más bajo respectivamente.

$$f(0) = (0)^2 - 3 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$f(4) = (4)^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 8 \rightarrow \text{Máximo absoluto en el punto } B(4,\ 8)$$

Nuestro máximo absoluto se alcanza en $x = 4$, tomando un valor de 8 y el mínimo absoluto en este caso coincide con el mínimo relativo.

Solución:

$f(x)$ tiene un mínimo relativo que coincide con el mínimo absoluto en $A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

$f(x)$tiene un máximo absoluto en $B(4,\ 8)$.

2010. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea f la función definida como $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ para $x \neq \pm 1$.

a) [1 punto] Estudia y halla las asíntota de la gráfica de f.

b) [0,75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f.

Calculamos el dominio de $f(x)$:

$$dom f(x) = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\right\}$$

$$x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$dom f(x) = \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

El dominio de una función racional (que tenga x en el denominador) son todos los valores menos los que anulan el denominador. Calculamos su dominio simplemente igualando su denominador a cero y resolviendo la ecuación que obtendremos, así su dominio será todos los números reales menos las soluciones que hemos obtenido.

a) Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: En funciones de cociente de polinomios sabemos que las asíntotas verticales corresponden a los valores que anulan el denominador y no anulan al numerado. En este caso solamente ocurre para $x = \pm 1$.

Una recta $x = k$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si:

$$\lim_{x \to k^-} f = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x \to k^+} f = \pm\infty$$

Siendo k las raíces reales del denominador que no lo sean del numerador.

Estudiamos los límites laterales para conocer la posición de la gráfica de f respecto a su asíntota vertical.

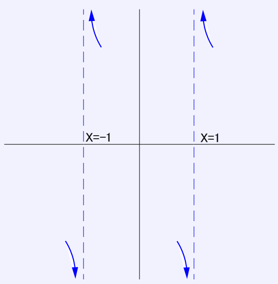
Para $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Tiene AV en $x = -1$

Posición de la gráfica respecto a la AV



Para $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Tiene AV en $x = +1$

AH:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{2} = -\infty$$

No tiene AH por la rama izquierda.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$$

No tiene AH por la rama derecha.

Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

$$\lim_{x\to -\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x\to +\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.
En funciones racionales de polinomios si el grado del numerador es mayor al grado denominador no tendrá Asíntota Horizontal.

La gráfica de f no posee asíntota horizontal (resultado que sabíamos de antemano, en funciones racionales irreducibles cuando el grado del polinomio del numerador es una unidad mayor que el polinomio que compone el denominador sabemos con seguridad que tendrá asíntota oblicua).

AO: Tiene la forma $y = mx + n$

i) Calculamos m:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x\cdot(x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{3x^2-1} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{6\cancel{x}}{6\cancel{x}} = \frac{6}{6} = 1$$

Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de una función $y = f(x)$si:

- $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, siendo $m \neq 0, \pm\infty$
- $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$, siendo $n \in \mathbb{R}$

Si una f posee una AH entonces no tiene una AO, pero si no tiene AH puede tener AO.
En funciones racionales, irracionales y en funciones a trozos debemos hacer por separado los límites para $\pm\infty$porque podemos obtener resultados distintos.

ii) Como $m = 1$, procedemos a calcular n:

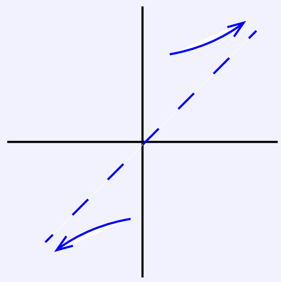
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x\cdot(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua de la gráfica de f tiene la forma $y = x$. Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua. Para ello haremos los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ de la gráfica de f menos la $A.O.$

Posición de la gráfica respecto a la AO



$$\lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - (x) \right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x\cdot(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ IND} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Al obtener 0^- cuando x tiende a $-\infty$, sabemos que por la rama izquierda la gráfica de f se aproxima por debajo de la asíntota oblicua.

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - (x) \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x\cdot(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ IND} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Al obtener 0^+ cuando x tiende a $+\infty$, sabemos que por la rama derecha la gráfica de f se aproxima por encima respecto de la asíntota oblicua.

Solución:

Las rectas $x = \pm 1$ son asíntotas verticales a la gráfica de f.
La recta $y = x$ es la asíntota oblicua a la gráfica de f.

b)

Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$
$$= \frac{3x^2\cdot\left(x^2-1\right) - x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} =$$
$$= \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} =$$
$$= \frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiaremos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} x^4-3x^2=0;\;\; x^2\cdot\left(x^2-3\right)=0 \\ x^2=0 \to x=0\;\;(doble) \\ x^2-3=0 \to x=\pm\sqrt{3} \end{array}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente, $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ y los problemas en el dominio, $x = \pm 1$:

Intervalos	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, -1\right)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$\left(1, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece	$\searrow$ Decrece	$\searrow$ Decrece	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece

Solución:

$f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$.

$f(x)$ es estrictamente decreciente en $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \setminus \{-1\}$.

$f(x)$ es estrictamente decreciente en $\left(0, \sqrt{3}\right) \setminus \{1\}$.

$f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

c) Para su representación es más que suficiente con la información obtenida en los apartados anteriores pero calcularemos los puntos de corte con los ejes de coordenadas para tener algún punto y esbozarla con mayor precisión.

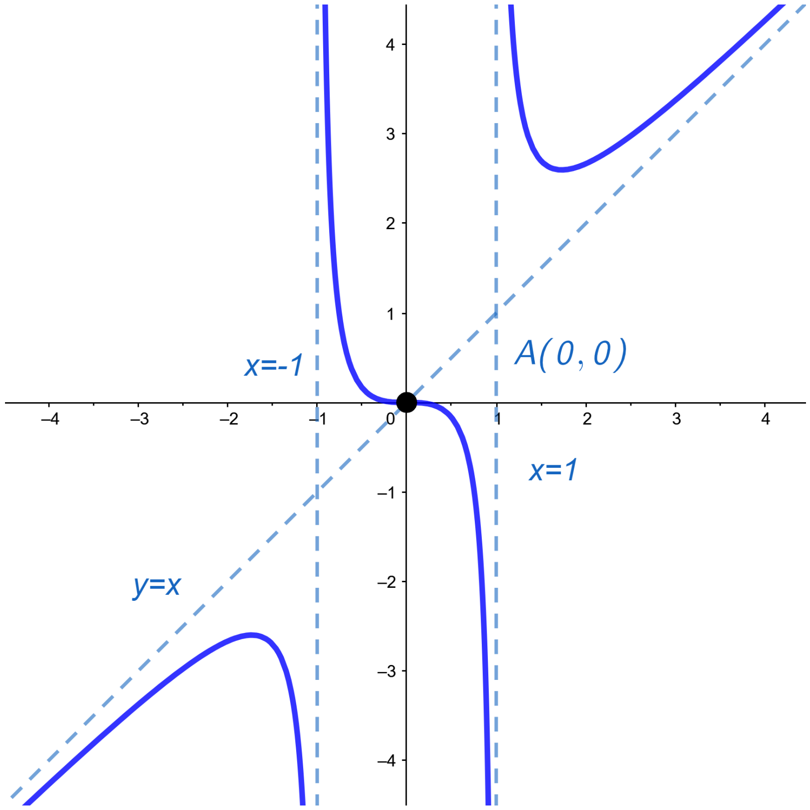
Punto de corte con los ejes:

Eje OX, le imponemos la condición $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función dada y resolvemos la ecuación que obtenemos:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = 0; \;\; x^3 = 0 \to x = 0 \;\; (triple)$$

El punto de corte con el eje OX es $A\,(0,\ 0)$, al obtener el punto $(0,\,0)$ no es necesario calcular el punto de corte con el eje OY porque será el mismo.

Representación de la gráfica de f:



2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -5$ y en el punto de abscisa $x = 2$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \tag{1}$$

Mientras que la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = a$ es de la forma:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a) \tag{2}$$

Para poder obtenerlas calcularemos previamente $f'(x)$, así podremos determinar $f(-5)$, $f(2)$, $f'(-5)$ y $f'(2)$.

$$f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$$

$$f(-5) = (-5+1)\sqrt[3]{3-(-5)} = -4 \cdot \sqrt[3]{8} = -8$$

$$f(2) = (2+1)\sqrt[3]{3-(2)} = 3 \cdot \sqrt[3]{1} = 3$$

$$f' = 1 \cdot \sqrt[3]{3-x} + (x+1) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(3-x)^2}} \cdot (0-1) = \sqrt[3]{3-x} - \frac{x+1}{3 \cdot \sqrt[3]{(3-x)^2}}$$

$$f'(-5) = \sqrt[3]{3-(-5)} - \frac{-5+1}{3 \cdot \sqrt[3]{(3-(-5))^2}} = 2 - \frac{-4}{3 \cdot 4} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$f'(2) = \sqrt[3]{3-(2)} - \frac{2+1}{3 \cdot \sqrt[3]{(3-(2))^2}} = 1 - \frac{3}{3} = 1 - 1 = 0$$

- **Para $x = -5$:** Sustituimos los valores en las expresiones de la recta tangente (1) y en la recta normal (2) para obtenerlas.

Su recta tangentes es $y - (-8) = \frac{7}{3} \cdot (x - (-5)) \to y + 8 = \frac{7}{3} \cdot (x+5)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$$y + 8 = \frac{7}{3} \cdot (x+5)\,; \;\; y = \frac{7}{3}x + \frac{35}{3} - 8 \to y = \frac{7}{3}x + \frac{11}{3}$$

Su recta normal es $y-(-8) = -\frac{1}{\frac{7}{3}} \cdot (x-(-5)) \rightarrow y+8 = -\frac{3}{7} \cdot (x+5)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$$y+8 = -\frac{3}{7} \cdot (x+5)\,; \;\; y = -\frac{3}{7}x - \frac{15}{7} - 8 \rightarrow y = \frac{3}{7}x - \frac{71}{7}$$

- **Para $x = 2$:** Sustituimos los valores en las expresiones de la recta tangente (1) y en la recta normal (2) para obtenerlas.

Su recta tangentes es $y-(3) = 0 \cdot (x-(2))\,; \;\; y-3 = 0 \cdot (x-2) \rightarrow y-23 = 0$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$$y-3 = 0 \rightarrow y = 3$$

Su recta normal es $y-(3) = -\frac{1}{0} \cdot (x-(2))\,; \;\; y-3 = -\frac{(x-2)}{0}; \;\; 0 \cdot (y-3) = -x+2 \rightarrow x-2 = 0$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$$x-2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Para este apartado podríamos tardar menos tiempo si nos damos cuenta que la recta tangente y normal en un punto $P\,(a,\ b)$ donde la pendiente de su recta tangente es cero, $f'\,(a) = 0$, son de la forma $y = b$ y $x = a$, porque al ser cero la derivada en un punto nos indica de que se trata de una recta horizontal y como la recta normal es la perpendicular a la tangente entonces la recta perpendicular a una horizontal solo puede ser una recta vertical.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = -5$ es $y = \frac{7}{3}x + \frac{11}{3}$.

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = -5$ es $y = \frac{3}{7}x - \frac{71}{7}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 2$ es $y = 3$.

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 2$ es $x = 2$.

2010. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sea $f : (0,\ +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ln\left(x^2 + 3x\right)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

(a) [1,5 puntos] Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.

(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

---

a) Si la tangente a su gráfica debe ser paralela a la recta $x - 2y + 1 = 0 \to y = \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ se cumple que $f'(x)=\dfrac{1}{2}$, al aplicar dicha condición obtendremos los valores de la coordenada x de los puntos que la verifican, para ello necesitamos calcular previamente la derivada de la función.

> Si la ecuación de la recta tangente es paralalela a la recta $y = mx + n$, sabemos que ambas pendientes deben de coincidir, por tanto $f'(a) = m$, la derivada de f en un punto es la pendiente de la tangente a la curva.

$$f(x) = ln\left(x^2 + 3x\right) \to f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x} \\ f'(x) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right| \to \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{2}$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{2};\ \ 2 \cdot (2x+3) = 1 \cdot \left(x^2 + 3x\right);\ \ 4x + 6 = x^2 + 3x;\ \ x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \text{ No válida} \\ x_2 = \ \ 3 \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas rechazamos $x_1 = -2$ por no pertenecer al dominio de f: $(0,\ +\infty)$. Ahora necesitamos obtener su coordenada en el eje de ordenadas (Eje OY), para ello calcularemos la imagen de dichos puntos sustituyéndolos en $f(x)$.

$$f(3) = ln\left(3^2 + 3 \cdot 3\right) = ln(18) \to A(3,\ ln(18))$$

Solución:

El punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es paralela a la recta $x - 2y + 1 = 0$ es $A(3,\ ln(18))$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3) \tag{1}$$

Todos los valores los tenemos calculados gracias al apartado a), por tanto solo tenemos que sustituirlos en la ecuación de la recta tangente (1).

$f(3) = ln(18)$

$f'(3) = \frac{1}{2}$

$y - ln(18) = \frac{1}{2} \cdot (x - 3)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - ln(18) = \frac{1}{2} \cdot (x - 3) \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2} + ln(18)$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 3$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(3) = -\frac{1}{f'(3)} \cdot (x - 3) \tag{2}$$

Solo tenemos que sustituir los valores que ya tenemos en la ecuación de la recta normal (2).

$y - ln(18) = -\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (x - 3) \rightarrow y - ln(18) = -2 \cdot (x - 3)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - ln(18) = -2 \cdot (x - 3) \rightarrow y = -2x + 6 + ln(18)$

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$ es $y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2} + ln(18)$.

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 3$ es $y = -2x + 6 + ln(18)$.